OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 162.

LEIBNIZ

ÜBER DIE

ANALYSIS DES UNENDLICHEN

HERAUSGEGEBEN

VON

GERHARD KOWALEWSKI.

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

OSTWALDS KLASSIKER

DER

EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 1. **H. Helmholtz,** Erhalt. der Kraft. (1847.) 7. Taus. (60 S.) ℳ —.80.

» 2. **C. F. Gauss,** Allgem. Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfern. wirk. Anziehungs- u. Abstoß.-Kräfte. (1840.) Herausg. v. A. Wangerin. 2. Aufl. (60 S.) ℳ —.80.

» 5. —— Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. v. Wangerin. Dritte Auflage. (64 S.) ℳ —.80.

» 10. **F. Neumann,** Die mathematischen Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) ℳ 1.50.

» 11. **Galileo Galilei,** Unterred. u. mathem. Demonstrat. über zwei neue Wissenszweige usw. (1638.) 1. Tag m. 13 u. 2. Tag m. 26 Fig. i. Text. Aus d. Ital. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. Zweiter, unveränderter Abdruck. (142 S.) ℳ 3.—.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerleg. ganzer algebr. Funktionen usw. (1799—1849.) Hrsg. v. E. Netto. 2. Aufl. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. u. in Gemeinschaft mit P. Groth herausgeg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Über die Anzieh. homogener Ellipsoide, Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausgeg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 24. **Galileo Galilei,** Unterred. u. math. Demonstrat. üb. 2 neue Wissenszweige usw. (1638.) 3. u. 4. Tag, m. 90 Fig. i. Text. Aus d. Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. v. A. v. Oettingen. 2. Aufl. (141 S.) ℳ 2.—.

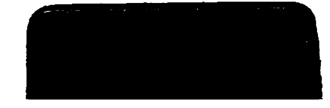
» 25. —— Anh. z. 3. u. 4. Tag, 5. u. 6 Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus d. Ital. u. Latein. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. 2., unveränderter Abdruck. (66 S.) ℳ 1.20.

» 36. **F. Neumann,** Theorie inducirter elektr. Ströme. (1847.) Herausgeg. von C. Neumann. Mit 10 Fig. im Text. (96 S.) ℳ 1.50.

» 46. Abhandlg. über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696); **Jac. Bernoulli** (1697) u. **Leonhard Euler** (1744). Herausg. v. P. Stäckel. Mit 19 Textfig. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgeg. von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 53. **C. F. Gauss,** Die Intensität der erdmagnet. Kraft auf absolutes Maß zurückgeführt. Herausgeg. von E. Dorn. (62 S.) ℳ 1.—.



Nr. 54. **J. H. Lambert**, Anmerk. und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausg. v. A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) ℳ 1.60.

» 55. **Lagrange** und **Gauss**, Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner**, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten u. zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 61. **G. Green**, Versuch, die math. Analysis auf die Theorien d. Elektric. u. des Magnetismus anzuwenden. (1828.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) ℳ 1.80.

» 64. **C. G. J. Jacobi**, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abelschen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain**, Abhandl. über die Functionen zweier Variabler mit 4 Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 69. **James Clerk Maxwell**, Über Faradays Kraftlinien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. (130 S.) ℳ 2.—.

» 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot\cdot$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlg. über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Latein. übersetzt u. herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Fig. im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 75. **Axel Gadolin**, Abhandlg. über die Herleitung aller krystallograph. Systeme mit ihren Unterabtheil. aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgeg. von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) ℳ 1.50.

» 76. **F. E. Neumann**, Theorie der doppelt. Strahlenbrech., abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausg. v. A. Wangerin. (52 S.) ℳ —.80.

» 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus determinantium.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

» 78. —— Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 79. **H. v. Helmholtz**, 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausgeg. von A. Wangerin. (80 S.) ℳ 1.20.

» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgeg. von A. Wangerin. (132 S.) ℳ 2.—.

Leibniz

über die

Analysis des Unendlichen

Eine Auswahl Leibnizscher Abhandlungen

aus dem Lateinischen übersetzt

und herausgegeben von

Dr. Gerhard Kowalewski

a. o. Professor an der Universität Bonn

Mit 9 Textfiguren

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1908

I. Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten, die sich weder an gebrochenen, noch an irrationalen Grössen stösst, und eine eigentümliche darauf bezügliche Rechnungsart.

(Acta Eruditorum, 1684.)

Gegeben sei eine Achse AX und mehrere Kurven wie VV, WW, YY, ZZ. Ihre zur Achse senkrechten Ordinaten VX, WX, YX, ZX mögen bezüglich v, w, y, z heißen. Der Abschnitt AX auf der Achse möge x heißen. VB, WC, YD, ZE seien die Tangenten und B, C, D, E ihre bezüglichen Schnittpunkte mit der Achse. Nun wähle man nach Belieben eine Strecke und nenne sie dx. Dann soll diejenige Strecke, welche sich zu dx verhält wie v (oder w oder y oder z) zu XB (oder XC oder XD oder XE) mit dv (oder dw oder dy oder dz) bezeichnet werden und Differenz der v (oder der w oder y oder z) heißen[1]. Nach diesen Festsetzungen werden die Rechnungsregeln folgende sein.

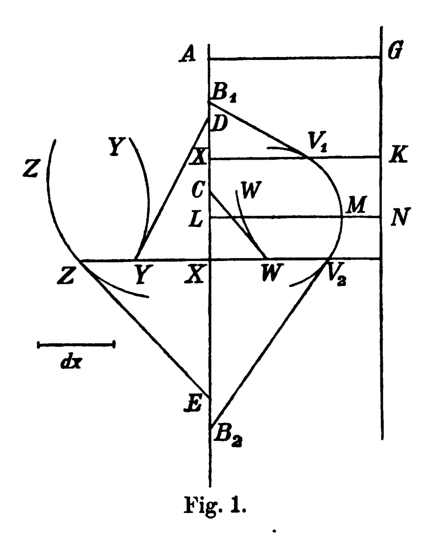


Fig. 1.

Wenn a eine gegebene konstante Größe ist, so wird da gleich 0 und $d(ax)$ gleich adx. Wenn y gleich v ist (d. h.

jede Ordinate der Kurve YY gleich der entsprechenden Ordinate der Kurve VV), so wird dy gleich dv. Nun Addition und Subtraktion: Wenn $z - y + w + x$ gleich v ist, so wird $d(z - y + w + x)$ oder dv gleich $dz - dy + dw + dx$. Multiplikation: $d(xv)$ ist gleich $xdv + vdx$, d. h. wenn man y gleich xv setzt, so wird dy gleich $xdv + vdx$. Es ist nämlich gleichgültig, ob man den Ausdruck xv oder als Abkürzung dafür den Buchstaben y anwendet. Zu beachten ist, daß bei dieser Rechnung x und dx in derselben Weise behandelt werden wie y und dy oder ein anderer unbestimmter Buchstabe mit seinem Differential. Zu beachten ist auch, daß es nur mit einer gewissen Vorsicht eine Rückkehr von der Differentialgleichung gibt; darüber werden wir an einer andern Stelle reden. Nun zur Division: $d\frac{v}{y}$ oder (wenn z gleich $\frac{v}{y}$ gesetzt wird) dz ist gleich $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ [2]).

Was die Zeichen anbetrifft, so ist folgendes wohl zu beachten. Wenn bei der Rechnung für einen Buchstaben einfach sein Differential eingesetzt wird, so werden dieselben Zeichen beibehalten, und für $+z$ wird $+dz$, für $-z$ wird $-dz$ geschrieben, wie aus der eben vorhin behandelten Addition und Subtraktion erhellt. Schreitet man aber zur Entwicklung der Werte, d. h. betrachtet man die Beziehung von z zu x, dann kommt es zum Vorschein, ob der Wert von dz eine positive Größe ist oder kleiner als Null, d. h. negativ. Tritt der letztere Fall ein, dann wird die Tangente ZE vom Punkte Z aus nicht nach A hin gezogen, sondern in der entgegengesetzten Richtung, die von X nach unten weist; dies findet statt, wenn die Ordinaten z mit zunehmenden x abnehmen. Und da die Ordinaten v bald zunehmen, bald abnehmen, so wird dv bald positiv, bald negativ sein. Im ersten Falle wird die Tangente V_1B_1 nach A hin, im zweiten V_2B_2 nach der entgegengesetzten Seite gezogen. Keins von beiden gilt aber an der Zwischenstelle M, in dem Augenblick, wo die v weder zunehmen noch abnehmen, sondern im Stillstand begriffen sind. dv wird alsdann gleich 0, und es kommt nicht darauf an, ob die Größe positiv oder negativ ist; denn $+0$ ist gleich -0. An dieser Stelle ist v, d. h. die Ordinate LM, ein Maximum (oder, wenn die konvexe Seite der Achse zugekehrt ist, ein Minimum), und die Tangente der Kurve in M wird weder in der Richtung von X nach A hinauf gezogen,

um sich der Achse zu nähern, noch auch in der entgegengesetzten Richtung, die von X nach unten weist; sie ist vielmehr parallel zur Achse. Wenn dv in bezug auf dx unendlich ist, dann steht die Tangente senkrecht auf der Achse, d. h. sie ist die Ordinate. Wenn dv und dx gleich sind, so bildet die Tangente mit der Achse einen halben rechten Winkel. Wenn bei zunehmenden Ordinaten auch ihre Inkremente oder Differenzen dv zunehmen (d. h. wenn bei positiv gesetzten dv auch die ddv, die Differenzen der Differenzen, positiv sind oder bei negativ gesetzten dv auch die ddv negativ), so kehrt die Kurve der Achse ihre konvexe Seite, sonst ihre konkave Seite zu. Wo aber das Inkrement ein Maximum oder Minimum ist, also die Inkremente aus abnehmenden zunehmende werden oder umgekehrt, da ist ein Wendepunkt, und Konkavität und Konvexität vertauschen sich, vorausgesetzt, daß nicht auch die Ordinaten dort aus zunehmenden abnehmende werden oder umgekehrt; dann würde nämlich die Konkavität oder Konvexität bleiben. Daß aber die Inkremente fortfahren zuzunehmen oder abzunehmen, die Ordinaten jedoch aus zunehmenden abnehmende werden oder umgekehrt, das ist unmöglich[3]. Ein Wendepunkt ist daher vorhanden, wenn weder v, noch dv gleich 0 ist, wohl aber ddv gleich 0. Deshalb hat auch das Problem des Wendepunktes nicht wie das Problem des Maximums zwei, sondern drei gleiche Wurzeln. Dies alles hängt vom richtigen Gebrauch der Zeichen ab.

Manchmal aber sind, wie vorhin bei der Division, zweideutige Zeichen anzuwenden, bevor es nämlich feststeht, wie sie entwickelt werden sollen. Und zwar müssen, wenn mit zunehmenden x die $\frac{v}{y}$ zunehmen (abnehmen), die zweideutigen Zeichen in $d\frac{v}{y}$, d. h. in $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ so entwickelt werden, daß dieser Bruch eine positive (negative) Größe wird. Es bedeutet aber $\mp$ das Entgegengesetzte von $\pm$, so daß, wenn dieses $+$ ist, jenes $-$ ist oder umgekehrt. Es können auch in derselben Rechnung mehrere Zweideutigkeiten vorkommen, die ich durch Klammern unterscheide. Wenn z. B. $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v} = w$ wäre, so würde sein

$$\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy} + \frac{(\pm)\, ydz\, (\mp) zdy}{zz} + \frac{((\pm))\, xdv\, ((\mp))\, vdx}{vv} = dw$$

sein, damit nicht die von den verschiedenen Gliedern herrührenden Zweideutigkeiten vermischt werden. Dabei ist zu beachten, daß ein zweideutiges Zeichen mit sich selbst $+$ gibt, mit seinem entgegengesetzten $-$, während es mit einem andern eine neue Zweideutigkeit bildet, die von beiden abhängt.

Potenzen: $dx^a = a \cdot x^{a-1} dx$. Z. B. ist $dx^3 = 3x^2 dx$.

$d\frac{1}{x^a} = -\frac{a\,dx}{x^{a+1}}$. Z. B. wird, wenn $w = \frac{1}{x^3}$ ist, $dw = -\frac{3\,dx}{x^4}$.

Wurzeln: $d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$. (Hieraus folgt $d\sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$; denn a ist in diesem Falle 1, und b ist 2, also $\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ gleich $\frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$; nun ist y^{-1} dasselbe wie $\frac{1}{y}$, nach der Natur der Exponenten einer geometrischen Reihe, und $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ ist $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$.)

$d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = -\frac{a\,dx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$. Es hätte aber die Regel der ganzen Potenz genügt, um sowohl die Brüche als auch die Wurzeln zu erledigen; denn eine Potenz wird ein Bruch, wenn der Exponent negativ ist, und sie verwandelt sich in eine Wurzel, wenn der Exponent gebrochen ist. Ich habe aber jene Folgerungen lieber selbst gezogen, als sie andern zu ziehen überlassen, da sie sehr allgemein sind und häufig vorkommen. Auch ist es bei einer an sich verwickelten Sache besser, für Leichtigkeit zu sorgen.

Kennt man, wenn ich so sagen soll, den obigen Algorithmus dieses Kalküls, den ich Differentialrechnung nenne, so lassen sich alle andern Differentialgleichungen durch ein gemeinsames Rechnungsverfahren finden, es lassen sich die Maxima und Minima sowie die Tangenten erhalten, ohne daß es dabei nötig ist, Brüche oder Irrationalitäten oder andere Verwicklungen zu beseitigen, was nach den bisher bekannt gegebenen Methoden doch geschehen mußte. Der Beweis alles dessen wird für einen in diesen Dingen Erfahrenen leicht sein, wenn er nur den bisher nicht genug erwogenen Umstand beachtet, daß man dx, dy, dv, dw, dz als proportional zu den augenblicklichen Differenzen, d. h. Inkrementen oder Dekrementen,

der x, y, v, w, z (eines jeden in seiner Reihe) betrachten kann. So kommt es, daß man zu jeder vorgelegten Gleichung ihre Differentialgleichung aufschreiben kann. Dies geschieht, indem man für jedes Glied (d. h. jeden Bestandteil, der durch bloße Addition oder Subtraktion zur Herstellung der Gleichung beiträgt) einfach das Differential des Gliedes einsetzt, für eine andere Größe jedoch (die nicht selbst ein Glied ist, sondern zur Bildung eines Gliedes beiträgt) ihr Differential anwendet, um das Differential des Gliedes selbst zu bilden, und zwar nicht ohne weiteres, sondern nach dem oben vorgeschriebenen Algorithmus. Die bisher bekannt gemachten Methoden haben aber einen solchen Übergang nicht. Sie wenden nämlich meistens eine Strecke wie DX oder eine andere von dieser Art an, nicht aber die Strecke dy, die die vierte Proportionale zu DX, DY, dx ist, und dadurch wird alles verwirrt. Daher schreiben sie vor, daß Brüche und Irrationalitäten (worin Unbestimmte vorkommen) zuvor beseitigt werden. Es ist auch klar, daß unsere Methode die transzendenten Linien beherrscht, die sich nicht auf die algebraische Rechnung zurückführen lassen oder von keinem bestimmten Grade sind, und zwar gilt das ganz allgemein, ohne besondere, nicht immer zutreffende Voraussetzungen. Man muß nur ein für allemal festhalten, daß eine Tangente zu finden so viel ist wie eine Gerade zeichnen, die zwei Kurvenpunkte mit unendlich kleiner Entfernung verbindet, oder eine verlängerte Seite des unendlicheckigen Polygons, welches für uns mit der Kurve gleichbedeutend ist. Jene unendlich kleine Entfernung läßt sich aber immer durch irgend ein bekanntes Differential, wie dv, oder durch eine Beziehung zu demselben ausdrücken, d. h. durch eine gewisse bekannte Tangente. Wäre insbesondere y eine transzendente Größe, z. B. die Ordinate der Zykloide, und käme sie in der Rechnung vor, mit deren Hilfe z, die Ordinate einer andern Kurve bestimmt wäre, und verlangte man dz oder durch dessen Vermittlung die Tangente der zweiten Kurve, so wäre unter allen Umständen dz durch dy zu bestimmen, weil man die Tangente der Zykloide hat. Die Tangente der Zykloide selbst aber ließe sich, wenn wir annehmen, daß wir sie noch nicht hätten, in ähnlicher Weise durch Rechnung finden aus der gegebenen Eigenschaft der Kreistangenten.

Wir wollen nunmehr ein Beispiel für die Rechnungsart auseinandersetzen, wobei bemerkt sei, daß ich hier die Division

durch $x:y$ bezeichne, was dasselbe bedeutet wie x dividiert durch y oder $\frac{x}{y}$. Die erste oder die gegebene Gleichung sei

$$x:y + (a+bx)(c-xx):(ex+fxx)^2 + ax\sqrt{gg+yy} + yy:\sqrt{hh+lx+mxx} = 0.$$

Sie drückt die Beziehung zwischen x und y oder zwischen AX und XY aus, wobei a, b, c, e, f, g, h, l, m als gegeben vorausgesetzt werden. Es wird ein Verfahren gesucht, in einem gegebenen Punkte Y die Gerade YD zu zeichnen, die die Kurve berührt, oder es wird das Verhältnis der Strecke DX zu der gegebenen Strecke XY gesucht. Zur Abkürzung wollen wir $a+bx=n$, $c-xx=p$, $ex+fxx=q$, $gg+yy=r$ und $hh+lx+mxx=s$ setzen. Dann wird

$$x:y+np:qq+ax\sqrt{r}+yy:\sqrt{s}=0.$$

Dies sei die zweite Gleichung. Nach unserm Kalkül steht fest, daß

$$d(x:y) = (\pm xdy \mp ydx):yy$$

ist, ebenso, daß

$$d(np:qq) = \{(\pm)2npdq(\mp)q(ndp+pdn)\}:q^3$$

ist und

$$d(ax\sqrt{r}) = axdr:2\sqrt{r}+a\sqrt{r}dx$$

und

$$d(yy:\sqrt{s}) = \{((\pm))yyds((\mp))4ysdy\}:2s\sqrt{s}.$$

Alle diese Differentiale von $d(x:y)$ bis zu $d(yy:\sqrt{s})$ geben zusammen addiert 0 und liefern auf diese Weise eine dritte Gleichung; denn es werden doch für die Glieder der zweiten Gleichung ihre Differentiale eingesetzt. Nun ist $dn=bdx$ und $dp=-2xdx$ und $dq=edx+2fxdx$ und $dr=2ydy$ und $ds=ldx+2mxdx$. Setzt man diese Werte in die dritte Gleichung ein, so erhält man eine vierte Gleichung. Die einzigen Differentiale, die darin noch übrig geblieben sind, nämlich dx und dy, treten immer außerhalb der Nenner ungebunden auf, und jedes Glied ist entweder mit dx oder mit dy multipliziert, so daß hinsichtlich dieser beiden Größen immer das Homogeneitätsgesetz gewahrt ist, wie kompliziert auch die Rechnung sein mag. Man kann daher immer den Wert von $dx:dy$, d. h. des Verhältnisses von dx zu dy, also der gesuchten Strecke DX zu der gegebenen XY, erhalten. Dieses

Verhältnis wird hier in unserer Rechnung (wenn man die vierte Gleichung in eine Proportion verwandelt) sein wie das von

$$\mp x : yy - axy : \sqrt{r}\,((\pm))\,2y : \sqrt{s}$$

zu

$$\mp 1 : y\,(\pm)\,2np\,(e + 2fx) : q^3\,(\pm)\,(2nx - pb) : q^2 + a\sqrt{r}\,((\pm))\,y^2\,(l + 2mx) : 2s\sqrt{s}\,.$$

x und y sind aber, weil der Punkt Y gegeben ist, auch gegeben. Gegeben sind ferner die oben aufgeschriebenen Werte der Buchstaben n, p, q, r, s, ausgedrückt durch x und y. Man hat also, was man suchte. Dieses ziemlich verwickelte Beispiel haben wir nur deshalb hergesetzt, damit es klar wird, in welcher Weise die obigen Regeln auch bei einer schwierigen Rechnung zu gebrauchen sind. Jetzt ist es aber besser, ihren Nutzen an Beispielen zu zeigen, die dem Intellekt zugänglicher sind.

Es seien zwei Punkte C und E (Fig. 2) gegeben und eine Gerade SS in derselben Ebene mit ihnen. Man verlangt auf SS einen Punkt F so zu wählen, daß nach Verbindung von C mit F und E mit F das Rechteck aus CF und einer gegebenen Strecke h und das aus EF und einer gegebenen Strecke r die kleinstmögliche Summe geben. Wenn also SS die Grenze zweier Medien ist, und h die Dichtigkeit des Mediums auf der Seite C, etwa des Wassers, r die Dichtigkeit des Mediums auf der Seite E, etwa der Luft, bedeutet, so wird ein Punkt F von der Art gesucht, daß der Weg von C nach E über F unter allen möglichen der leichteste ist. Wir wollen annehmen, daß alle möglichen Rechtecksummen jener Art oder alle Schwierigkeiten der möglichen Wege durch die zur Geraden GK senkrechten Ordinaten KV der Kurve VV dargestellt werden (Fig. 1). Wir wollen diese Ordinaten w nennen. Gesucht wird dann die kleinste von ihnen NM. Da die Punkte C und E gegeben sind, so sind auch die Lote auf SS gegeben, nämlich CP (welches wir c) und EQ (welches wir e), ferner ist gegeben PQ (welches wir p nennen wollen). QF

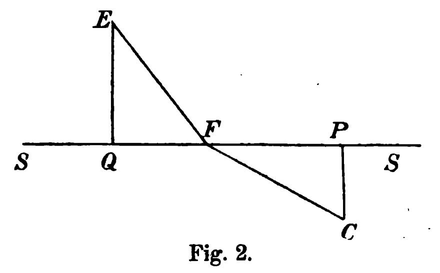


Fig. 2.

aber, welches gleich GN (oder AX) ist, wollen wir x nennen und CF mit f und EF mit g bezeichnen. Dann wird $FP = p - x$ und $f = \sqrt{cc + pp - 2px + xx}$ oder kurz $f = \sqrt{l}$. Ferner wird $g = \sqrt{ee + xx}$ oder kurz $g = \sqrt{m}$. Wir haben mithin

$$w = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}.$$

Die Differentialgleichung dieser Gleichung lautet, da es feststeht, daß im Falle des Minimums $dw = o$ ist,

$$o = hdl : 2\sqrt{l} + rdm : 2\sqrt{m}$$

nach den mitgeteilten Regeln unseres Kalküls. Nun ist $dl = -2(p - x)\,dx$ und $dm = 2x\,dx$. Also wird

$$h\,(p - x) : f = rx : g.$$

Jetzt wollen wir dies der Dioptrik anpassen und f und g, d. h. CF und EF, einander gleich setzen, weil die Brechung im Punkte F dieselbe bleibt, wie groß man auch die Länge der Strecke CF annehmen mag. Es wird alsdann $h\,(p - x) = rx$ oder $h : r = x : (p - x)$ oder h zu r wie QF zu FP, d. h. der Sinus des Einfallswinkels und der des Brechungswinkels, FP und QF, verhalten sich umgekehrt, wie r und h, die Dichtigkeiten der Medien, in denen der Einfall und die Brechung geschieht. Diese Dichtigkeit ist jedoch nicht in bezug auf uns, sondern in bezug auf den Widerstand, den die Strahlen des Lichtes erfahren, zu verstehen. So hat man einen Beweis der Rechnung, die wir an einer andern Stelle in diesen Acta*) mitgeteilt haben, als wir eine allgemeine Grundlage der Optik, Katoptrik und Dioptrik auseinandersetzen. Andere gelehrte Männer haben mit vielen Umschweifen das zu erjagen gesucht, was einer, der in diesem Kalkül erfahren ist, auf drei Zeilen ohne weiteres herausbringen kann. Das will ich jetzt noch an einem andern Beispiel lehren. 133 (Fig. 3) sei eine Kurve von folgender Beschaffenheit: Zieht man von irgend einem ihrer Punkte wie 3 nach sechs auf der Achse befindlichen

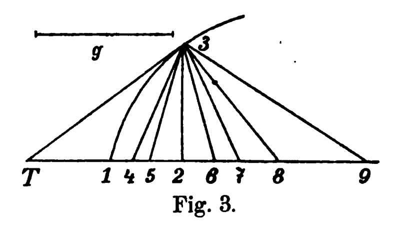


Fig. 3.

*) Acta Eruditorum, 1682.

festen Punkten 4, 5, 6, 7, 8, 9 die sechs Strecken 34, 35, 36, 37, 38, 39, so sind sie zusammen addiert einer gegebenen Strecke g gleich.

T 14526789 sei die Achse und 12 die Abszisse, 23 die Ordinate. Gesucht wird die Tangente 3 T. Ich behaupte, daß $T2$ sich zu 23 verhalten wird wie

$$\frac{23}{34}+\frac{23}{35}+\frac{23}{36}+\frac{23}{37}+\frac{23}{38}+\frac{23}{39} \text{ zu } -\frac{24}{34}-\frac{25}{35}+\frac{26}{36}+\frac{27}{37}+\frac{28}{38}+\frac{29}{39}.$$

Und dieselbe Regel wird, nur unter Hinzufügung weiterer Glieder, gelten, wenn nicht sechs, sondern zehn oder noch mehr feste Punkte angenommen werden[4]). Wollte man so etwas nach den bekannt gemachten Tangentenmethoden unter Beseitigung der Irrationalitäten durch Rechnung herausbringen, so wäre das eine abscheuliche und manchmal unüberwindliche Mühe, wie wenn die ebenen und körperlichen Rechtecke, die sich aus allen möglichen Amben und Ternen jener Geraden bilden lassen, einer gegebenen Größe gleichgesetzt werden müßten. In allen diesen Fällen und in viel verwickelteren ist unsere Methode von derselben überraschenden und geradezu beispiellosen Leichtigkeit. Dies sind nur die Anfänge einer viel höheren Geometrie, die sich auch zu den schwierigsten und schönsten Problemen der angewandten Mathematik hinerstreckt, und nicht leicht wird jemand diese Dinge ohne unsere Differentialrechnung oder eine ähnliche mit gleicher Leichtigkeit behandeln. Anhangsweise wollen wir die Lösung des Problems hinzufügen, welches *de Beaune*[5]) dem *Descartes* stellte, und dieser in Bd. 3 der Briefe zu lösen versucht, aber nicht gelöst hat. Man soll eine Linie WW von folgender Beschaffenheit finden (vergl. Fig. 1): Ist WC die nach der Achse gezogene Tangente, so ist XC immer gleich derselben konstanten Strecke a. Nun verhält sich XW oder w zu XC oder a wie dw zu dx. Nimmt man dx (welches beliebig gewählt werden kann) konstant, also immer gleich b an, d. h. wachsen die x oder AX gleichförmig, so wird $w = \frac{a}{b} dw$. Es werden also die Ordinaten w den dw, ihren Inkrementen oder Differenzen, proportional, d. h. wenn die x eine arithmetische Reihe bilden, so bilden die w eine geometrische Reihe, oder wenn die w die Numeri sind, so sind die x die Logarithmen. Die Linie WW ist folglich die logarithmische.

❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋

II. Über die Linie, in welche sich etwas Biegsames durch sein eignes Gewicht krümmt, und ihren hervorragenden Nutzen zur Auffindung von unendlich vielen mittleren Proportionalen und von Logarithmen.

(Acta Eruditorum, 1691.)

Das Problem der Kettenlinie oder Seillinie hat einen doppelten Nutzen, einmal den, daß die Kunst des Findens oder die Analysis erweitert wird, die bisher nicht genügend an solche Dinge heranreichte, zweitens den, daß die Praxis des Konstruierens gefördert wird. Ich habe nämlich gefunden, daß mit dieser Linie, so leicht sie selbst zu machen ist, soviel Nützliches gemacht werden kann, und daß sie keiner der Transzendenten nachsteht. Denn sie läßt sich durch Aufhängen eines Fadens oder besser eines Kettchens (das seine Ausdehnung nicht ändert) ohne weiteres herstellen und durch eine Art physischer Konstruktion beschreiben. Und mit ihrer Hilfe können, wenn sie einmal beschrieben ist, beliebig viele mittlere Proportionalen und die Logarithmen und die Quadratur der Hyperbel geliefert werden. Als erster hat *Galilei* über sie nachgedacht, aber nicht ihre Natur erfaßt; sie ist nämlich nicht eine Parabel, wie er vermutet hatte. *Joachim Jungius*[6]), ein ausgezeichneter Philosoph und Mathematiker unseres Jahrhunderts, der vor *Descartes* viele bedeutende Gedanken über die Verbesserung der Wissenschaften gehabt hatte, hat durch Anstellung von Rechnungen und Ausführung von Versuchen die Parabel ausgeschlossen, aber nicht die wahre Linie an ihre Stelle gesetzt. In jener Zeit haben sich viele an der Frage versucht, aber keiner hat sie gelöst, bis mir kürzlich von einem gelehrten Mathematiker die Veranlassung gegeben wurde, sie zu behandeln. Als nämlich der berühmte *Bernoulli*[7]) eine von mir herrührende besondere Analysis des Unendlichen, aus-

gedrückt in der auf meinen Rat eingeführten Differentialrechnung, mit gutem Erfolg auf gewisse Probleme angewandt hatte, forderte er mich im Maiheft der Acta des vorigen Jahres (Seite 218f.) öffentlich auf, ich sollte versuchen, ob nicht unsere Rechnungsart auch für solche Probleme wie die Auffindung der Kettenlinie ausreichte. Als ich ihm zu Gefallen die Sache versuchte, hatte ich nicht nur Erfolg und löste, wenn ich nicht irre, als erster dieses berühmte Problem, sondern ich bemerkte auch, daß die Linie hervorragende nützliche Anwendungen hat. Dieser Umstand bewirkte, daß ich nach dem Beispiel von *Blaise Pascal* und andern die Mathematiker unter Festsetzung einer bestimmten Frist zu derselben Untersuchung einlud, um die Methoden zu prüfen, damit herauskäme, was jene liefern würden, die vielleicht andere Methoden benutzten als die, welche *Bernoulli* mit mir gebraucht. Vor Ablauf der Frist haben nur zwei angezeigt, daß ihnen die Sache geglückt war, *Christian Huygens*, dessen große Verdienste um die Wissenschaft jeder kennt, und *Bernoulli* selbst mit seinem Bruder, einem geistvollen und sehr gelehrten jungen Manne, der durch diese Darbietung bewirkt hat, daß wir alles Hervorragende im Anschluß hieran erwarten. Von ihm nun glaube ich, daß er in Wirklichkeit herausgefunden hat, was ich angedeutet hatte, daß nämlich auch bis hierher unser Rechnungsverfahren reicht, und daß Dinge, die vorher für sehr schwierig galten, doch einen Zugang gestatten. Ich will aber auseinandersetzen, was von mir gefunden worden ist. Was die andern geleistet haben, wird die Vergleichung zeigen.

Die Linie läßt sich folgendermaßen geometrisch konstruieren ohne Hilfe des Fadens oder der Kette und ohne Voraussetzung von Quadraturen durch diejenige Art von Konstruktion, die man bezüglich der Transzendenten meiner Meinung nach für die vollkommenste und mit der Analysis am meisten übereinstimmende halten muß. Es seien zwei gerade Strecken, die ein gewisses bestimmtes und unveränderliches Verhältnis zueinander haben, nämlich das von D und K (Fig. 4), die hier gezeichnet sind. Wenn dieses Verhältnis einmal bekannt ist, so geht alles Übrige mittels der gewöhnlichen Geometrie. Die unbegrenzte Gerade ON sei zum Horizont parallel, und zu ihr senkrecht sei OA, welches gleich ON_3 ist, und über N_3 stehe die Senkrechte $N_3\xi_3$, die sich zu OA verhält wie D zu K. Zwischen OA und $N_3\xi_3$ suche man die mittlere Proportionale $N_1\xi_1$, und zwischen $N_1\xi_1$ und $N_3\xi_3$, ebenso

zwischen $N_1 \xi_1$ und OA suche man wieder die mittlere Proportionale. So fahre man fort, die mittleren und zu den gefun-

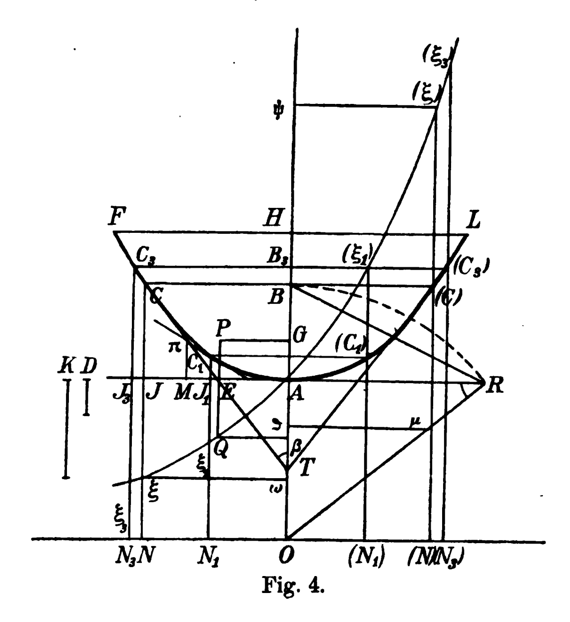


Fig. 4.

denen die dritten Proportionalen zu suchen, und beschreibe und verlängere dadurch die Linie $\xi \xi A$ (ξ) (ξ). Sie wird von solcher Beschaffenheit sein, daß bei gleich groß gewählten Intervallen z. B. $N_3 N_1$, $N_1 O$, $O(N)_1$, $(N)_1 (N)_3$ usw. die Ordinaten $N_3 \xi_3$, $N_1 \xi_1$, OA, $(N)_1 (\xi)_1$, $(N)_3 (\xi)_3$ eine fortlaufende geometrische Progression bilden. Eine solche Linie pflege ich eine **logarithmische** zu nennen. Nun errichte man, nachdem ON, $O(N)$ gleich groß gewählt sind, über N bzw. (N) die Lote NC und (N) (C), die gleich der halben Summe von $N\xi$ und (N) (ξ) sind. Dann werden C und (C) Punkte der Kettenlinie FCA $(C)L$ sein, von der auf diese Weise beliebig viele Punkte geometrisch angegeben werden können.

Wenn dagegen die Kettenlinie physisch konstruiert wird mittels eines hängenden Fadens oder einer Kette, so lassen sich mit ihrer Hilfe beliebig viele mittlere Proportionalen herstellen, und es lassen sich die Logarithmen gegebener Zahlen oder die Zahlen gegebener Logarithmen finden. Wünscht man z. B. den

Logarithmus der Zahl $O\omega$ unter der Voraussetzung, daß der Logarithmus von OA (welches die Einheit ist und auch Parameter heißen soll) gleich Null sei, oder wünscht man, was auf dasselbe hinauskommt, den Logarithmus des Verhältnisses zwischen OA und $O\omega$, so nehme man zu $O\omega$ und OA die dritte Proportionale $O\psi$. Dann wird die Ordinate BC oder ON, die der halben Summe OB von $O\omega$ und $O\psi$ als Abszisse entspricht, der gesuchte Logarithmus der gegebenen Zahl sein. Wenn dagegen der Logarithmus ON gegeben ist, so muß man die von dort aus zur Kettenlinie gezogene Ordinate verdoppeln und dann so in zwei Teile zerlegen, daß die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten gleich der gegebenen (Einheit) OA wird (was sehr leicht ist)[8]. Die beiden Abschnitte werden dann die gesuchten dem gegebenen Logarithmus entsprechenden Zahlen sein, eine größer, die andere kleiner als die Einheit. Anders ausgedrückt: Hat man wie angegeben NC oder OR gefunden (der Punkt R ist auf der Horizontalen AR so gewählt, daß wir OR gleich OB oder NC haben), so werden Summe und Differenz der Strecken OR und AR die beiden dem gegebenen Logarithmus entsprechenden Zahlen sein, eine größer, die andere kleiner als die Einheit. Denn die Differenz von OR und AR ist $N\xi$ und die Summe von ihnen $(N)(\xi)$, wie umgekehrt OR die halbe Summe und AR die halbe Differenz von $(N)(\xi)$ und $N\xi$ ist[9].

Es folgt die Lösung der Grundprobleme, die man bei Linien zu stellen pflegt.

In einem gegebenen Punkt der Linie die Tangente zu ziehen. Auf der durch den Scheitel A gelegten Horizontalen AR wähle man R so, daß OR gleich der gegebenen Strecke OB wird. Dann wird die antiparallel zu OR gezogene Gerade CT (die die Achse AO in T trifft) die gesuchte Tangente sein. Antiparallel nenne ich hier zur Abkürzung OR und CT, wenn sie mit den Parallelen AR und BC nicht dieselben Winkel, wohl aber solche Winkel ARO und BCT bilden, die sich zu einem Rechten ergänzen. Die rechtwinkligen Dreiecke OAR und CBT sind ähnlich.

Eine Gerade zu finden, die dem Bogen der Kette gleich ist. Man beschreibe um O mit dem Radius OB einen Kreis, der die Horizontale durch A in R schneidet. Dann wird AR gleich dem gegebenen Bogen AC sein. Es geht aus dem Gesagten auch hervor, daß $\psi\omega$ gleich der Kette $CA(C)$ sein wird[10]. Wäre die Kette doppelt so lang, wie

der Parameter, d. h. AC oder AR gleich OA, so würde die Neigung, die die Kette in C gegen den Horizont hat, oder der Winkel BCT gleich 45° sein, also der Winkel $CT(C)$ ein rechter.

Den Raum zu quadrieren, der zwischen der Kettenlinie und einer Geraden oder mehreren Geraden liegt. Nachdem der Punkt R wie vorhin gefunden ist, wird das Rechteck OAR gleich dem vierlinigen Gebiet $AONCA$ sein. Danach ist es ganz leicht, irgend welche andern Gebiete zu quadrieren. Es ist auch klar, daß die Bögen den gefundenen vierlinigen Gebieten proportional sind.

Den Schwerpunkt der Kette oder irgend eines Teiles derselben zu finden. Nachdem man zu dem Bogen AC oder zu AR, zu der Ordinate BC und zu dem Parameter OA die vierte Proportionale $O\vartheta$ gefunden hat, addiere man sie zu der Abszisse OB. Die Hälfte OG dieser Summe wird dann den Schwerpunkt G der Kette $CA(C)$ geben. Es schneide ferner die Tangente CT die durch A gelegte Horizontale in E, und man vollende das Rechteck $GAEP$. Dann wird P der Schwerpunkt des Bogens AC sein. Der Abstand des Schwerpunktes irgend eines andern Bogens wie CC_1 von der Achse ist AM; dabei bedeutet πM das Lot auf den Scheitelhorizont, das von π, dem Treffpunkt der Tangenten $C\pi$ und $C_1\pi$ aus gefällt ist; der Schwerpunkt von CC_1 läßt sich allerdings auch aus denen der Bögen AC und AC_1 leicht erhalten. Man hat nach dem Obigen auch BG, die größtmögliche Senkung des Schwerpunkts eines Seils oder einer Kette oder irgend einer biegsamen und unausdehnbaren Geraden, die mit ihren beiden Enden C und (C) aufgehängt ist und die gegebene Länge $\psi\omega$ besitzt. Bei jeder andern Gestalt nämlich, die sie annehmen mag, wird der Schwerpunkt weniger tief liegen, als wenn sie sich in die unserige $CA(C)$ biegt.

Den Schwerpunkt der Figur zu finden, die zwischen der Kettenlinie und einer Geraden oder mehreren Geraden liegt. Man nehme $O\beta$ gleich der Hälfte von OG und vollende das Rechteck βAEQ. Dann wird Q der Schwerpunkt des vierlinigen Gebiets $AONCA$ sein. Danach erhält man leicht auch den Schwerpunkt irgend eines andern Raumes, der von der Kettenlinie und einer Geraden oder mehreren Geraden begrenzt wird. Es folgt hieraus ferner jene bemerkenswerte Tatsache, daß nicht nur die vierlinigen Gebiete wie $AONCA$ den Bögen AC proportional sind, wie

wir schon erwähnten, sondern daß auch die Abstände, die die Schwerpunkte beider von der Horizontalen durch O haben, nämlich OG und $O\beta$, proportional sind, weil jener immer das Doppelte von diesem ist, und daß die Abstände von der Achse OB, nämlich PG und $Q\beta$ proportional, ja sogar völlig gleich sind.

Inhalt und Oberfläche der Körper zu finden, die dadurch erzeugt werden, daß die zwischen der Kettenlinie und einer oder mehreren Geraden liegende Figur um eine beliebige unbewegte Gerade rotiert. Man erhält dies bekanntlich aus den beiden vorigen Problemen. Rotiert die Kette $CA(C)$ z. B. um die Achse AB, so wird die erzeugte Oberfläche gleich einem Kreise, dessen Radius ein Quadrat gleich dem doppelten Rechteck aus EA und AR bildet. Eben so gut lassen sich andere Oberflächen oder auch Körper ausmessen, die in der angegebenen Weise erzeugt sind.

Viele Theoreme und Probleme, die entweder in dem, was wir hier gesagt haben, enthalten sind oder sich ohne große Mühe daraus ableiten lassen, übergehe ich, weil es mir gut schien, für Kürze zu sorgen. Nimmt man z. B. zwei Kettenpunkte C und C_1, deren Tangenten sich in π treffen, und fällt von den Punkten C_1, π, C auf die Scheitelhorizontale AE die Lote C_1J_1, πM, CJ, so wird C_1J_1 mal AC weniger C_1C mal J_1M gleich BB_1 mal OA.

Auch unendliche Reihen kann man mit Nutzen anwenden. Wenn z. B. der Parameter OA die Einheit ist, und der Bogen AC oder die Gerade AR a heißt, und die Ordinate BC y genannt wird, so ergibt sich

$$y = \frac{1}{1}a - \frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{40}a^5 - \frac{5}{112}a^7 \text{ usw.},$$

eine Reihe die nach einer leichten Regel fortgesetzt werden kann. Man kann auch, wenn Bestimmungsstücke der Linie gegeben sind, nach dem Gesagten das Übrige erhalten. Ist z. B. der Scheitel A gegeben und ein anderer Punkt C und AR, die Länge des Kettenabschnitts AC, so läßt sich der Parameter AO der Linie oder der Punkt O erhalten: da nämlich auch B gegeben ist, verbinde man B, R und ziehe von R aus die Gerade $R\mu$, so daß der Winkel $BR\mu$ gleich dem Winkel RBA wird. $R\mu$ wird dann (verlängert) die (verlängerte) Achse BA in dem gesuchten Punkte O treffen.

In dem Obigen ist, wie ich glaube, das Wichtigste enthalten. Das übrige auf diese Linie Bezügliche wird sich daraus, wenn nötig, leicht ableiten lassen. Beweise beizufügen unterlasse ich, um nicht zu ausführlich zu sein. Ich darf es besonders deshalb, weil sie sich für jeden, der die in diesen Acta entwickelten Rechnungen unserer neuen Analysis versteht, von selbst ergeben[11].



III. Eine auf transzendente Probleme sich erstreckende Ergänzung der praktischen Geometrie, mit Hilfe einer neuen allgemeinen Methode durch unendliche Reihen.

(Acta Eruditorum, 1693.)

Früher wurden die unendlichen Reihen nach ihrem ersten Erfinder dem Holsteiner *Nikolaus Mercator* [12]), durch Divisionen und nach dem berühmten Geometer *Isaac Newton* [13]) durch Wurzelausziehungen gesucht. Es schien mir nun, daß man zu ihnen bequemer und allgemeiner gelangen kann, indem man die gesuchte Reihe selbst als gefunden annimmt, so daß die Koeffizienten der Glieder im weiteren Verlauf bestimmt werden. Auf diese Weise kann man, nicht nur, wenn eine Eigenschaft einer Linie in gewöhnlicher Rechnung, sondern auch, wenn sie in einer Integral- oder Differential- oder höheren Differentialformel gegeben ist, die beliebig verwickelt sein mag, immer zu einer Reihe gelangen, mit deren Hilfe das Gesuchte, falls man die ganze Reihe betrachtet, genau dargestellt wird, falls man einen Teil der Reihe anwendet, mit beliebiger Annäherung. Durch ein Beispiel wird die Sache klar werden. Dasselbe ist allerdings leicht und längst auseinandergesetzt, aber doch zum Klarmachen geeignet. Wir wollen nämlich den Logarithmus aus dem Numerus oder den Numerus aus dem Logarithmus suchen.

Das Verhältnis oder der Numerus sei $(a + x) : a$ und der Logarithmus wegen der Quadratur der Hyperbel

$$y = \int a dx : (a + x).$$

Dann wird also $dy = a dx : (a + x)$ oder

$$a dy : dx + x dy : dx - a = 0.$$

Sucht man nun bei gegebenem Numerus den Logarithmus, so werde

$$y = bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 \text{ usw.}$$

Dann wird

$$dy : dx = b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3 \text{ usw.},$$

mithin

$$0 = \left\{ \begin{array}{rcl} ady : dx & = & ab + 2acx + 3aex^2 + 4afx^3 \text{ usw.} \\ + xdy : dx & = & \quad + bx + 2cx^2 + 3ex^3 \text{ usw.} \\ -a & = & -a \end{array} \right\} = 0$$

Damit sich in der entwickelten Gleichung, die keine andere Unbestimmte als x enthält, alle Glieder aufheben, so daß die Gleichung in eine identische übergeht, wird $ab - a = 0$, d. h. $b = 1$, $2ac + b = 0$, d. h. $c = -1 : 2a$, $3ae + 2c = 0$, d. h. $e = 1 : 3a^2$, $4af + 3e = 0$, d. h. $f = -1 : 4a^3$ und so fort. Es wird also

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} \text{ usw.}$$

Wenn dagegen der Logarithmus y gegeben ist, und der Numerus $(a + x) : a$ oder x selbst gesucht wird, so schreibe man

$$x = ly + my^2 + ny^3 + py^4 \text{ usw.}$$

Dann wird

$$dx : dy = l + 2my + 3ny^2 + 4py^3 \text{ usw.}$$

Nach dem Obigen ist aber immer

$$a + x - adx : dy = 0$$

und daher

$$0 =$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + x & = & a + ly + my^2 + ny^3 + py^4 \text{ usw.} \\ -adx : dy & = & -la - 2amy - 3any^2 - 4apy^3 - 5aqy^4 \text{ usw.} \end{array} \right\} = 0$$

Damit sich in dieser letzten Gleichung die Glieder aufheben, und sie in eine identische übergeht, wird sein $l = 1$, $m = l : 2a$, $n = m : 3a = l : 2 . 3a^2$, $p = n : 4a = l : 2 . 3 . 4a^3$ und so fort. Es wird also

$$x = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 . 2a} + \frac{y^3}{1 . 2 . 3a^2} + \frac{y^4}{1 . 2 . 3 . 4a^3} \text{ usw.}$$

Wir wollen noch ein anderes Beispiel hinzufügen, das beim ersten Anblick schwieriger zu sein scheint. Es soll nämlich bei gegebenem Bogen und Radius der Sinus rectus[14]) gefunden werden oder, was auf dasselbe hinauskommt (weil die Peripherie praktisch genügend gegeben ist), bei gegebenem Sinus totus[15]) und gegebenem Winkel. Der Kreisbogen sei y und

der Sinus rectus x, der Radius aber sei a. Nach unserer Differentialmethode steht dann fest, daß die allgemeine Relation zwischen dem Bogen und Sinus sich durch folgende Gleichung ausdrücken läßt[16]:

$$a^2 dy^2 = a^2 dx^2 + x^2 dy^2.$$

Nun werde

$$x = by + cy^3 + ey^5 + fy^7 \text{ usw.}$$

Dann wird sein

$$dx : dy = b + 3cy^2 + 5ey^4 + 7fy^6 \text{ usw.}$$

Setzt man diese Werte für x und $dx : dy$ in die Differentialgleichung ein und macht die entwickelte Gleichung zu einer identischen, läßt also die Glieder sich aufheben, so findet man die Werte der angenommenen Größen b, c, e, f usw. Dasselbe erreichen wir aber viel kürzer, indem wir zu den zweiten Differentialen herabsteigen. Differenziert man nämlich die Differentialgleichung

$$a^2 dy^2 = a^2 dx^2 + x^2 dy^2$$

noch einmal, indem man dy konstant setzt, so entsteht

$$2a^2 dxddx + 2xdxdy^2 = 0$$

oder

$$a^2 ddx + xdy^2 = 0.$$

Nun ist

$$ddx : dy^2 = 2 . 3cy + 4 . 5ey^3 + 6 . 7fy^5 \text{ usw.},$$

wie sich durch Differentiation des eben vorhin erhaltenen Wertes von $dx : dy$ ergibt. Demnach entwickelt sich jetzt die Differentialgleichung zweiter Ordnung in folgender Weise:

$$0 = \left\{\begin{array}{r} x = \\ a^2 ddx : dy^2 = \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} by + & cy^3 + & ey^5 + & fy^7 & \text{usw.} \\ 2 . 3a^2cy + & 4 . 5a^2ey^3 + & 6 . 7a^2fy^5 + & 8 . 9a^2gy^7 & \text{usw.} \end{array}\right\} = 0$$

Läßt man die Glieder der entwickelten Gleichung sich aufheben und nimmt $b = 1$ an, so kommt $b + 2 . 3a^2c = 0$, also $c = -1 : 2 . 3a^2$, $c + 4 . 5a^2e = 0$ oder $e = -c : 4 . 5a^2$ $= 1 : 2 . 3 . 4 . 5a^4$, ebenso $f = -1 : 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7a^6$ und so fort. Hieraus folgt

$$x = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1 . 2 . 3a^2} + \frac{y^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5a^4} - \frac{y^7}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7a^6} \text{ usw.},$$

wenn man annimmt, daß a der Sinus totus oder der Radius ist, x der Sinus rectus und y der Bogen, der in der Praxis bekanntlich immer kleiner als der Radius sein muß.

Nun noch ein anderes Beispiel, wo aus einer gegebenen Eigenschaft der Tangenten die Linie gesucht wird. Es sei in der Tat y die Ordinate, x die Abszisse, t die Subtangente (um dieses Wort von *Huygens* zu gebrauchen) oder der Abschnitt der Achse, der zwischen der Tangente und der Ordinate liegt. Gesucht wird eine Kurve, bei der

$$t = (yy - xy) : a$$

ist. Es ist aber allgemein nach den Gesetzen der Differentialrechnung $t : y = dx : dy$, also wird hier

$$dx : dy = (y - x) : a$$

oder

$$adx + xdy = ydy \text{ oder } adx : dy + x - y = 0.$$

Es sei

$$x = by + cy^2 + ey^3 + fy^4 \text{ usw.}$$

Dann wird

$$dx : dy = b + 2cy + 3ey^2 + 4fy^3 \text{ usw.}$$

Daher ist

$$0 = \left\{\begin{matrix} adx : dy = & ab + & 2acy + & 3aey^2 + & 4afy^3 \text{ usw.} \\ +x = & + & by + & cy^2 + & ey^3 \text{ usw.} \\ -y = & - & y & & \end{matrix}\right\} = 0,$$

und durch Fortheben entsteht $ab = 0$, also $b = 0$, $2ac + b - 1 = 0$ oder $c = 1 : 2a$, $e = -c : 3a = -1 : 2 . 3a^2$, $f = -e : 4a = 1 : 2 . 3 . 4a^3$ und so fort, mithin

$$x = \frac{y^2}{1 . 2a} - \frac{y^3}{1 . 2 . 3a^2} + \frac{y^4}{1 . 2 . 3 . 4a^3} - \frac{y^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5a^4} \text{ usw.}$$

Übrigens ist aus dem oben Gefundenen zu entnehmen, daß, wenn $a : (a - x)$ der Numerus und y der Logarithmus ist,

$$x = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{1 . 2a} + \frac{y^3}{1 . 2 . 3a^2} - \frac{y^4}{1 . 2 . 3 . 4a^3} \text{ usw.}$$

sein wird. Also ist $x = y - x$. Die gesuchten Linien, deren Subtangente $(yy - xy) : a$ sein soll, sind demnach von folgender Beschaffenheit. Wenn man y als Logarithmus betrachtet, so wird x die Differenz zwischen dem Logarithmus und seiner Subnormale. Subnormale nenne ich aber x, weil $a : (a - x)$

als Numerus gesetzt ist. Hieraus geht hervor, daß man durch die unendlichen Reihen manchmal bequem den endlichen Wert erhält, auch wenn er transzendent ist. Aber dies hätte uns hier nebenbei genügt, daß sich auch ganz verwickelte Probleme nach dieser Methode in der Praxis mit beliebiger Genauigkeit lösen lassen. Daß sich nach derselben Methode auch die Wurzeln von beliebig aufsteigenden Gleichungen erhalten lassen, liegt so auf der Hand, daß es hier nicht erörtert zu werden braucht.



IV. Eine Ergänzung der ausmessenden Geometrie oder allgemeine Ausführung aller Quadraturen durch Bewegung, sowie eine mehrfache Konstruktion einer Linie aus einer gegebenen Tangentenbedingung.

(Acta Eruditorum, 1693.)

Die Ausmessungen der Linien, der Flächen und der meisten Körper reduzieren sich wie auch die Auffindung der Schwerpunkte auf die Quadratur ebener Figuren, und hieraus entsteht die ausmessende Geometrie, die, wenn ich so sagen soll, ihrer ganzen Art nach von der bestimmenden Geometrie verschieden ist, in der nur die Größen von Strecken vorkommen und demgemäß gesuchte Punkte aus gegebenen bestimmt werden. Die bestimmende Geometrie läßt sich in geregelter Weise auf algebraische Gleichungen reduzieren, in denen dann die Unbekannte bis zu einem gewissen Grade aufsteigt. Die ausmessende Geometrie dagegen hängt ihrer Natur nach keineswegs von der Algebra ab, obwohl es manchmal (nämlich im Falle der gewöhnlichen Quadraturen) vorkommt, daß sie auf algebraische Größen zurückgeführt wird. Ebenso hängt die bestimmende Geometrie nicht von der Arithmetik ab, obwohl es manchmal (nämlich im Falle der Kommensurabilität) vorkommt, daß sie auf Zahlen oder rationale Größen zurückgeführt wird. Wir haben daher drei Arten von Größen: rationale, algebraische und transzendente. Die Quelle der algebraischen Irrationalitäten ist aber die Zweideutigkeit oder Mehrdeutigkeit des Problems; denn es wäre unmöglich, mehrere demselben Problem genügende Werte durch dieselbe Formel auszudrücken, wenn man sich nicht der Wurzelgrößen bediente; diese lassen sich aber nur in speziellen Fällen auf Rationalitäten zurückführen. Die Quelle der transzendenten Größen ist dagegen die Unendlichkeit,

so daß der Geometrie der Transzendenten (wovon die ausmessende Geometrie ein Teil ist) eine Analysis entspricht, die nichts anderes als die Wissenschaft des Unendlichen ist. Zur Konstruktion algebraischer Größen wendet man nun gewisse Bewegungen an. Dabei sind entweder keine materiellen Kurven beteiligt, sondern nur gerade Stäbe, oder wenn starre Kurven beteiligt sind, so dürfen sie doch nur zum Zweck des Treffens oder Schneidens in Anspruch genommen werden. Ebenso hat man zur Konstruktion transzendenter Größen bis jezt die Anschließung oder Anpassung der Kurven an Geraden angewandt, wie es beim Beschreiben einer Zykloide geschieht oder bei der Abwicklung eines um eine Linie oder Fläche herumgelegten Fadens oder Blattes. Auch wenn jemand die Spirale des *Archimedes* oder die Quadratrix der Alten geometrisch (d. h. durch genaue stetige Bewegung) beschreiben will, so wird er dies leicht durch eine gewisse Anpassung einer Geraden an eine Kurve leisten, so daß die gerade Bewegung durch die kreisförmige reguliert wird. Ich schließe also diese Dinge durchaus nicht von der Geometrie aus, obwohl *Descartes* es getan hat; denn die so beschriebenen Linien sind genau und haben die nützlichsten Eigenschaften, und sie sind den transzendenten Größen angepaßt. Es gibt jedoch noch andere Konstruktionsweisen, die eine gewisse physische Beimischnung zu haben scheinen: wie wenn jemand Probleme der bestimmenden Geometrie durch Lichtstrahlen konstruierte (was häufig mit Nutzen geschehen könnte), oder wie wir die Fläche der Hyperbel quadriert oder die Logarithmen konstruiert haben durch eine Bewegung, die aus einer gleichförmigen und einer durch gleichmäßige Reibung verzögerten zusammengesetzt ist, oder mit Hilfe einer schweren Saite oder Kette, die die Ketten- oder Seillinie (la chainette) bildet. Wenn das Konstruktionsverfahren genau ist, so wird es in die geometrische Theorie aufgenommen, wenn es leicht und nützlich ist, so kann es in die Praxis aufgenommen werden. Denn auch die Bewegung, die nach bestimmten Voraussetzungen geschieht, ist einer geometrischen Behandlung fähig nach dem Beispiel des Schwerpunktes. Es gibt aber eine gewisse neue Art von Bewegung, die, wie ich glaube, wir zum ersten Male auf geometrische Konstruktionen angewandt haben; ich werde sogleich erzählen, bei welcher Gelegenheit. Sie läßt sich, wie es scheint, mehr als die andern zu der reinen Geometrie in Beziehung setzen und ist verwandt mit der Beschreibung der Linien durch

Fäden von Nabelpunkten oder Brennpunkten aus. Es wird nämlich bei ihr nur verlangt, daß der Punkt, der die Linie in der Ebene beschreibt und an dem einen Ende eines in derselben Ebene (oder einer äquivalenten) befindlichen Fadens befestigt ist, sich infolge der Bewegung des andern Endpunktes bewegt, jedoch lediglich durch Zug, nicht aber durch einen seitlichen Anstoß, der auch von dem Faden wegen seiner Biegsamkeit nicht zu erwarten ist; er soll vielmehr in der Richtung des gespannten oder ziehenden Fadens fortgezogen werden, was von selbst erfolgt, wenn sich auf dem Wege kein Hindernis einstellt. Es könnte jedoch ein materieller Faden, da er niemals die volle Biegsamkeit hat, wie sie die Geometrie voraussetzt, den Schreiber, d. h. den beschreibenden Punkt, (da er frei in der Ebene liegt) etwas nach seitwärts drücken, so daß die Bewegung des Schreibers kein reines Ziehen wäre. Diesem materiellen Hindernis begegnet man zweckmäßig durch ein materielles Gegenmittel, nämlich so, daß eine Ursache da ist, die den beschreibenden Punkt ein wenig festdrückt, d. h. an der Stelle der Ebene, wo er sich befindet, haften läßt. Eine solche Ursache kann ein Gewicht sein, das auf dem beschreibenden Punkte liegt oder mit ihm verbunden ist, und durch das dieser Punkt gegen die horizontale Ebene gedrückt wird, auf der er sich bewegen und die Linie beschreiben soll. Wenn dabei der Widerstand des Daraufliegenden, wodurch bewirkt wird, daß sich der Punkt nicht ganz leicht von seinem Platz fortbewegt, jene kleine dem Faden noch anhaftende Starrheit völlig überwiegt, so wird der Faden besser nachgeben und gespannt sein. Auf diese Weise wird er nur durch Zug, nicht durch Anstoß wirken, und das allein wird hier in betreff des beschreibenden Punktes verlangt. Daher geschieht es aber, daß sich solche Bewegung der transzendenten Geometrie wunderbar anpaßt, weil sie sich unmittelbar auf die Tangenten der Linie bezieht oder auf Richtungen, also auf elementare Größen, deren Zahl zwar unendlich ist, die aber der Größe nach unangebbar oder unendlich klein sind.

Diese Konstruktion auszudenken, bekam ich einst in Paris folgende Gelegenheit. *Claude Perrault*, ein hervorragender Pariser Arzt, der durch mechanische und architektonische Studien ausgezeichnet, auch durch die Herausgabe des Vitruvius bekannt ist und bei seinen Lebzeiten in der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften von Frankreich nicht der letzte war, hat mir und vor mir vielen andern folgendes Problem

vorgelegt, dessen Lösung, wie er offen gestand, ihm noch nicht geglückt war. Man soll (Fig. 5) die Linie BB finden, die ein Gewicht, das an dem Ende B des Fadens oder Kettchens AB befestigt ist, mit dem Punkte B oder einem äquivalenten in einer Horizontalebene beschreibt, wenn wir das andere Ende A des Fadens AB auf der unbeweglichen Geraden AA entlang führen und dadurch das Gewicht B auf der horizontal gerichteten Ebene fortziehen, in die (oder eine mit ihr äquivalente) auch die Gerade AA und während der Dauer der Bewegung der Faden AB fällt. Er benutzte aber (zur Veranschaulichung) eine Taschenuhr mit silbernem Gehäuse B, die er mittels einer am Gehäuse befestigten Kette AB über den Tisch zog, indem er das Ende A längs einer Geraden AA entlang führte. Dabei beschrieb der unterste Punkt des Gehäuses (der Mittelpunkt des Bodens) auf dem Tisch die Linie BB. Ich beobachtete diese Linie aufmerksamer (weil ich mich damals hauptsächlich mit der Betrachtung der Tangenten beschäftigte) und machte sofort die zutreffende Bemerkung, daß der Faden beständig die Linie berührt, oder daß z. B. die Gerade A_3B_3 die Tangente der Linie BB im Punkte B_3 ist. Das läßt sich auch folgendermaßen beweisen (Fig. 6): Man beschreibe um B_3 als Mittelpunkt mit dem Faden A_3B_3 als Radius einen beliebig kleinen Kreisbogen A_3F. Darauf fasse man den Faden B_3F in F an und ziehe ihn direkt, d. h. seiner eigenen

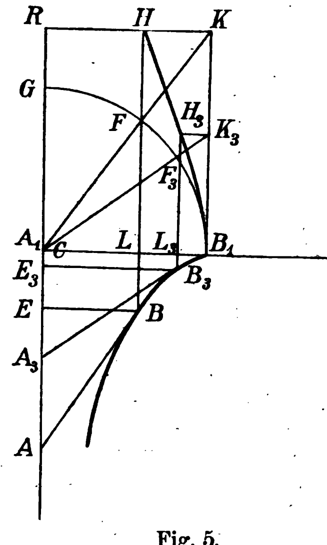


Fig. 5.

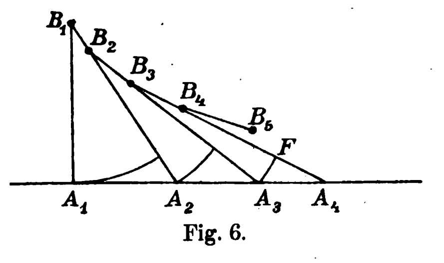


Fig. 6.

Richtung folgend, bis nach A_4, so daß er von B_3F nach B_4A_4 gebracht wird. Denkt man sich nun, daß man es bei den Punkten B_1, B_2 ebenso gemacht hätte, wie bei dem Punkt B_3, so hätte der Punkt B jedenfalls das Polyogon $B_1B_2B_3$ usw. beschrieben, dessen Seiten immer in den Faden fallen. Läßt man jeden Bogen wie A_3F unbegrenzt abnehmen und schließlich verschwinden, wie es bei der von uns beschriebenen stetigen Ziehbewegung geschieht, bei der ein stetiges, aber immer unangebbares Herumdrehen des Fadens stattfindet, so geht offenbar das Polygon in eine Kurve über, deren Tangente der Faden ist. Ich sah daher, daß die Sache auf folgendes umgekehrte Tangentenproblem zurückkam: Eine Linie BB von solcher Beschaffenheit zu finden, daß der Tangentenabschnitt AB zwischen der Achse AA und der Kurve BB einer gegebenen Konstanten gleich ist. Und es war für mich nicht schwer herauszubekommen, daß die Beschreibung dieser Linie sich auf die Quadratur der Hyperbel zurückführen läßt. Man beschreibe nun den Mittelpunkt C oder A_1 (wo der Faden A_1B_1 zugleich Ordinate und Tangente der Kurve ist), aber mit dem Radius A_1B_1, einen Kreis B_1FG, der die Achse A_1E in G trifft, und zu dieser Achse parallel sei B_1K, die in K durch die von C aus gezogene Gerade CF getroffen wird (Fig. 5). B_1K ist dann die Tangente des Kreisbogens B_1F. Jetzt ziehe man durch F die Gerade FLB parallel zur Achse AE. Sie treffe A_1B_1 in L und die Kurve BB in B. Man verlängere diese Gerade und nehme auf ihr LH gleich B_1K. Macht man überall dasselbe, so entsteht die Tangenslinie[17]) B_1HH, und man findet, daß das Rechteck B_1A_1E gleich der Tangensfigur, d. h. gleich der dreilinigen Fläche B_1LHB_1 ist[18]); z. B. wird B_1A_1 mal A_1E_3 etwas liefern, was der dreilinigen Fläche $B_1L_3H_3B_1$ gleich ist. Da sich nun die Fläche der Tangensfigur bekanntlich mittels der Quadratur der Hyperbel, d. h. durch Logarithmen, angeben läßt[19]), so ist klar, daß man damit auch A_1E oder LB, oder den Kurvenpunkt B, erhält. Umgekehrt wird man hiernach, wenn die Zeichnung der Linie BB gegeben ist, die Quadratur der Hyperbel oder die Logarithmen konstruieren können. Bei der weiteren Ausführung dieser Dinge halte ich mich nicht auf, besonders weil ich glaube, daß dieselbe Sache *Christian Huygens* aufs beste erledigt hat. Dieser berühmte Mann teilte mir vor nicht langer Zeit brieflich mit, daß ihm eine merkwürdige Art, die Hyperbel zu quadrieren aufgestoßen sei. Daß sie ganz kürzlich in der „Histoire des

ouvrages des savants“ veröffentlicht und gerade die vorliegende ist, entnehme ich aus den Angaben, die eben neulich die vortrefflichen Gebrüder *Bernoulli* in den Acta Eruditorum machten. Es kommt hier aus Anlaß jener *Huygens*schen Arbeit heraus, daß sich eine ähnliche Bewegung sehr schön zur Beschreibung derjenigen Linie anwenden läßt, bei welcher der Tangentenabschnitt zwischen Kurve und Achse sich zu dem Achsenabschnitt zwischen einem festen Punkt und dem Schnitt der Tangente, d. h. AB zu CA (Fig. 5), verhält wie eine konstante Strecke zu einer andern konstanten Strecke. Dies mahnte mich auch daran, meine alten Untersuchungen auf diesem Gebiete endlich herauszugeben.

Es war natürlich leicht einzusehen, wenn man einmal die Beziehung der Bewegung zu den Tangenten erfaßt hatte, daß unzählige andere Linien, die nicht so leicht auf eine Quadratur zurückführbar sind, mittels derselben Kunst konstruiert werden können. Denn wenn auch AA keine Gerade wäre, sondern eine Kurve, so würde nichtsdestoweniger der Faden die Kurve BB berühren. Ja noch mehr! Wenn auch der Faden AB während des Ziehens wüchse oder abnähme, so bliebe er nichtsdestoweniger die Tangente. Wäre daher irgendwie eine Relation zwischen CA und AB gegeben (so z. B., daß AB der Sinus und CA der Tangens desselben Winkels ist), so ließe sich durch verschiedene Einrichtungen die Bewegung des Fadens so regulieren, daß er sich nach dem gegebenen Gesetz unter Zusammenziehung fortbewegt. Man kann sogar unendlich viele demselben Problem genügende Linien nach diesem Konstruktionsverfahren zeichnen, jede, wenn man will, durch einen gegebenen Punkt. Wird der beschreibende Punkt von mehreren Fäden zugleich gezogen, so kann man die zusammengesetzte Richtung benutzen. Aber wenn auch nur ein Faden da ist, so kann man seine Länge variieren lassen, indem an das Gewicht B ein Rad geknüpft ist oder eine Figur, die so wie bei der Beschreibung der Zykloide in der Ebene gerollt wird. Es kann auch eine starre Gerade, die immer zum Faden senkrecht ist oder einen gegebenen oder nach bestimmtem Gesetz sich ändernden Winkel damit bildet, mit B mitgeführt werden, und auf ihr kann man sich einen andern beschreibenden Punkt in Bewegung denken. Es können auch zwei auf die Ebene sich stützende Gewichte zugleich gezogen werden, die entweder immer denselben Abstand bewahren oder ihn auch während der Bewegung ändern. Man kann sich auch

zwei Ebenen denken, eine, in der sich der Punkt C bewegt und sich fest auf sie stützt, eine andere, in der ein von B ausgehender Stift unter ganz leichter Berührung (so daß die Bewegung von Bewegung von B selbst gar nicht gestört wird) eine neue Linie beschreibt; und diese Ebene soll ihre eigene Bewegung haben. Die Tangente der neuen Linie wird die Gerade sein, die die Richtung der zusammengesetzten Bewegung aus der des Stifts in der unbewegten Ebene und der der andern Ebene bezeichnet. Daraus lassen sich wieder die Eigenschaften der Tangenten der so beschriebenen neuen Linie bestimmen. Da diese Art von Bewegungen eine sehr weite Ausbreitung hat und unzählige Anwendungen enthält, so habe ich früher über die Sache nachdenkend viele Bogen Papier gefüllt und habe mich auch mit den praktischen Vorsichtsmaßregeln beschäftigt, besonders weil ich den hervorragenden Nutzen für die umgekehrte Tangentenmethode und vor allem für die Quadraturen sah. Da nun eine Konstruktion gefunden war, die sich allgemein auf alle Quadraturen ausdehnt und so umfassend ist wie vielleicht keine andere seit Entstehung der Geometrie, so habe ich endlich beschlossen, sie zu veröffentlichen. Obwohl ich nämlich jene Dinge als Material für ein regelrechtes Werk und sozusagen für eine ganze Wissenschaft aufbewahrt habe, so wächst doch so vieles andere und von anderer Art heran, daß es besser ist, das Alte bei jeder nur möglichen Gelegenheit endlich abzutun, damit es nicht untergeht. Und jenes hat sich, über das Doppelte des Horazischen Maßes hinaus zurückgehalten, lange genug nach dem Licht gesehnt.

Ich will nun zeigen, daß das allgemeine Problem der Quadraturen sich auf die Auffindung einer Linie reduziert, die ein gegebenes Neigungsgesetz hat[20]), bei der also die Seiten des angebbaren charakteristischen Dreiecks in einer gegebenen Beziehung zueinander stehen. Darauf will ich zeigen, daß diese Linie durch die von uns ausgedachte Bewegung beschrieben werden kann. Bei jeder Kurve $C(C)$ denke ich mir ein doppeltes charakteristisches Dreieck[21]) (Fig. 7): das angebbare TBC und das unangebbare GLC; beide sind einander ähnlich. Das unangebbare wird umgrenzt von den Katheten GL und LC, den Elementen der Koordinaten CB, CF und der Basis oder Hypotenuse GC, dem Element des Bogens. Das angebbare TBC dagegen wird umgrenzt von der Achse, der Ordinate

und der Tangente und drückt gerade den Winkel aus, den die Richtung der Kurve (oder ihre Tangente) mit der Achse oder Basis bildet, d. h. die Neigung der Kurve in dem betrachteten Punkte C. Es sei jetzt die Zone $F(H)$ zu quadrieren, die zwischen der Kurve $H(H)$, den beiden parallelen Geraden FH und $(F)(H)$ und der Achse $F(F)$ liegt. Man wähle auf der Achse einen festen Punkt A und ziehe durch A senkrecht zu AF die Gerade AB als konjugierte Achse. Auf jeder (soweit als nötig verlängerten) HF nehme man einen Punkt C an, so daß die neue Linie $C(C)$ folgende Beschaffenheit hat: Zieht man vom Punkte C aus zu der (wenn nötig, verlängerten) konjugierten Achse sowohl die konjugierte Ordinate CB (gleich AF), als auch die Tangente CT, so verhält sich TB, der zwischen ihnen liegende Abschnitt dieser Achse, zu BC wie HF zu der Konstanten a, oder a mal BT ist gleich dem Rechteck AFH (das dem Dreieck $AFHA$ umbeschrieben ist). Dies festgesetzt behaupte ich, daß das Rechteck über a und $E(C)$, dem Unterschied der Kurvenordinaten FC und $(F)(C)$, gleich der Zone $F(H)$ ist. Es wird also, wenn die verlängerte Linie $H(H)$ auf A stößt, das Dreieck $AFHA$ der zu quadrierenden Figur gleich dem Rechteck über der Konstanten a und der Ordinate FC der quadrierenden Figur sein. Unser Kalkül zeigt dies sofort. Es sei nämlich $AF = y$, $FH = z$, $BT = t$, $FC = x$. Dann ist nach der Voraussetzung $t = zy : a$, andererseits $t = y\,dx : dy$ nach der in unserem Kalkül ausgedrückten Natur der Tangenten. Folglich ist

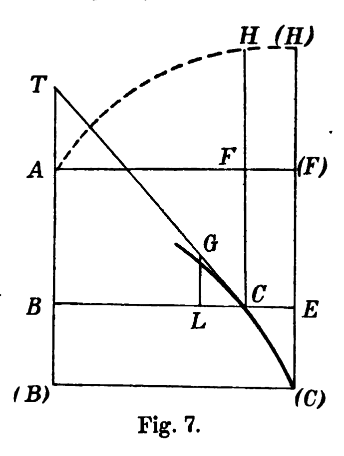


Fig. 7.

$$a\,dx = z\,dy,$$

also

$$ax = \int z\,dy = AFHA.$$

Die Linie $C(C)$ ist somit in bezug auf die Linie $H(H)$ eine quadrierende; denn die Ordinate FC von $C(C)$ liefert, mit der Konstanten a multipliziert, ein Rechteck gleich der Fläche

oder der Summe der Ordinaten von $H(H)$, die an die in Betracht kommenden Abszissen AF angelegt sind. Da sich BT zu AF verhält wie FH zu a (nach der Voraussetzung), und die Beziehung von FH zu AF gegeben ist (das die Natur der zu quadrierenden Figur darstellt), so wird folglich auch die Beziehung von BT zu FH oder zu BC gegeben sein, also auch die Beziehung von BT zu TC, d. h. die Beziehung zwischen den Seiten des Dreiecks TBC. Es ist daher zur Ausführung aller Quadraturen, also auch der Ausmessungen, nur nötig, bei gegebener Beziehung der Seiten des angebbaren charakteristischen Dreiecks TBC, oder bei gegebenem Neigungsgesetz, die Kurve $C(C)$ beschreiben zu können, von der wir gezeigt haben, daß sie die quadrierende ist.

Diese Beschreibung geschieht in folgender Weise: In Fig. 8 sei der rechte Winkel TAH unbeweglich und in einer Horizontalebene gelegen. Auf dem Schenkel AT schreite der vertikale Hohlzylinder TG fort, der unter die genannte Horizontalebene vorragt. In ihm sei aufwärts und abwärts beweglich der massive Zylinder FE, der an der obersten Stelle F einen angebundenen Faden FTC trägt derart, daß das Stück FT innerhalb des Hohlzylinders, das Stück TC in der genannten Horizontalebene ist. Ferner befinde sich am Ende C des Fadens TC ein Punkt, der durch ein darauf liegendes Gewicht

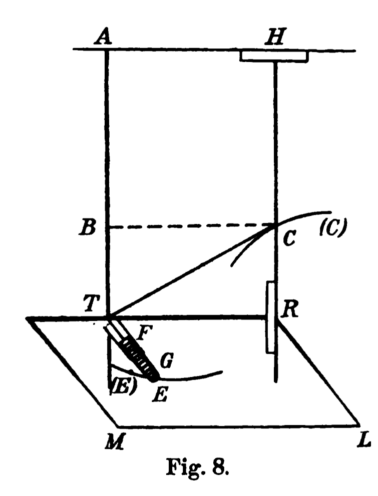


Fig. 8.

gegen eben diese Ebene gedrückt wird und in ihr die Linie $C(C)$ beschreibt. Die Bewegung geht aber aus von dem Hohlzylinder TG, der, während er auf AT von A fortgeführt wird, C anzieht. Der beschreibende Punkt oder Stift C schiebe nun HR vor sich her, einen in derselben Horizontalebene senkrecht auf AH (dem andern Schenkel des unbeweglichen rechten Winkels TAH) nach A hin fortschreitenden Stab. Dieses Schieben hindert nicht, daß der schiebende Punkt C nur durch den Zug des Fadens bewegt wird und daher dessen

Richtung bei der Bewegung folgt. Es sei aber auch eine Art Brett RLM vorhanden, das gerade mit dem Punkte R senkrecht auf dem Stab HR fortrückt, übrigens beständig von dem Hohlzylinder getrieben, so daß $ATHR$ ein Rechteck ist. Endlich sei auf diesem Brett (wenn man will, in Form einer herausragenden Leiste) eine starre Linie EE beschrieben, in die der massive Zylinder mittels eines Einschnitts, den man sich an dem Ende E zu denken hat, beständig eingreift; auf diese Weise wird, so wie R auf T zurückt, der Zylinder FE abwärts gehen. Da nun die Größe $ET + TC$ eine gegebene ist (nämlich zusammengesetzt aus dem massiven Zylinder EF und dem ganzen Faden FTC) und die Beziehung zwischen TC und TR oder BC gegeben ist (aus dem gegebenen Neigungsgesetz der Kurve), so hat man auch die Beziehung zwischen ET und TR, der Ordinate und Abszisse der Kurve EE, deren Natur und Beschreibung auf dem Brett LRM also durch die gewöhnliche Geometrie erhalten werden kann; man erhält also auch die Beschreibung der Linie $C(C)$ durch die vorliegende Vorrichtung. Es ist nun aber TC immer die Tangente der Linie $C(C)$ nach der Natur unserer Bewegung; also ist eine Linie $C(C)$ beschrieben, bei der das Neigungsgesetz oder die Beziehung der Seiten des angebbaren charakteristischen Dreiecks TRC oder TBC gegeben ist. Da diese Linie die quadrierende der zur Quadratur vorgelegten Figur ist, wie kurz vorher gezeigt wurde, so erhält man die gewünschte Quadratur oder Ausmessung.

Man kann auf verschiedene Weisen ähnliche Einrichtungen für die Probleme der umgekehrten Tangentenmethode treffen. Wenn sich z. B. der Punkt T auf einer Kurve TT (anstatt auf der Geraden AT) bewegt hätte, so wäre auch die Koordinate HC (oder die Abszisse AB) in die Rechnung hineingekommen. Und in der Tat läßt sich jedes umgekehrte Tangentenproblem auf eine Relation zwischen drei Geraden zurückführen, nämlich den beiden Koordinaten CB, CH und der Tangente CT, oder andere Funktionen an Stelle dieser. Oft kann aber die Sache durch eine viel einfachere Bewegung bewerkstelligt werden. Wäre z. B. die Beziehung zwischen AT und TC gegeben (d. h. die Linie $C(C)$ zu finden, wenn Kreise in bestimmter Anordnung der Lage nach gegeben sind, die die Linie senkrecht schneiden), so hätte ein geringerer Apparat genügt. Es wird nämlich unter Fortfall der Teile, die in H und R fortrücken, genügen, die starre Leitlinie in

einer unbeweglichen, durch AT hindurchgehenden Vertikalebene zu beschreiben. Bewegt sich dann auf der unbewegten Geraden AT der Punkt T oder der Hohlzylinder TG, und geht dabei der massive Zylinder TE abwärts, so wie es die gegebene Leitlinie EE vorschreibt, in die der Zylinder eingreift, so wird man immer wegen der (wie oben) konstanten Summe $ET + TC$ und der gegebenen Beziehung zwischen AT und TC leicht die erforderliche Beziehung zwischen AT und TE oder die Natur der Linie EE finden, und die mit ihrer Hilfe beschriebene $C(C)$ wird die gesuchte sein.

V. Eine neue Anwendung der Differentialrechnung und ihr Gebrauch bei verschiedenen Konstruktionen von Linien aus einer gegebenen Tangentenbedingung.

(Acta Eruditorum, 1694.)

Ich erinnere mich, in diesen Acta schon vorgebracht zu haben[22]), daß nicht nur (wie vorher bekannt) durch das Zusammentreffen von Geraden, die in bestimmter Anordnung genommen werden, sondern auch durch das Zusammentreffen von Kurven Linien entstehen. Ich will aber diese Sache, die von nicht geringer Bedeutung für die Förderung der Geometrie ist, genauer auseinandersetzen; denn nicht einmal im Falle zusammentreffender Geraden ist ihre ganze Tragweite erkannt worden. Ich werde hier also allgemein lehren, wie man folgendes Problem auf die Gesetze der gemeinen Geometrie zurückführt: Wenn (gerade oder krumme) Linien in bestimmter Anordnung[23]) ihrer Lage nach gegeben sind, die eine vorgelegte berühren, diese vorgelegte zu finden oder, was auf dasselbe hinauskommt: eine Linie zu finden, die unendlich viele in bestimmter Anordnung der Lage nach gegebene Linien berührt. Da dieses Problem in sehr weitem Umfang nützlich ist, so habe ich schon längst ein eigentümliches Rechnungsverfahren hierfür ausgedacht, oder ich habe vielmehr hierauf in eigentümlicher Weise unsere Differentialrechnung angewandt mit nicht zu verachtendem Vorteil. Wie nämlich *Descartes* die Örter der Alten durch Rechnung ausdrückend Gleichungen anwandte, die sich auf jeden Kurvenpunkt beziehen, so wenden wir hier unendlich viel umfassenderere Gleichungen an, die sich jedem Punkt jeder Kurve anpassen, die man aus der Reihe der in bestimmter Anordnung genommenen Kurven herausgreift. Man hat sich daher unter x und y die Abszisse und die Ordinate oder die Koordinaten einer jeden unter den genannten Kurven zu

denken; sie werden aber insbesondere auch bei der Kurve zugelassen, die aus dem Zusammentreffen jener entsteht oder sie berührt, — eine nützliche Art übereinstimmender Bezeichnungsweise. Die Koeffizienten, die mit den x, y in der Gleichung vorkommen, bezeichnen Größen, die bei einer und derselben Kurve konstant sind; die einen sind innerliche (nämlich Parameter), die andern äußerliche, die die Lage der Kurve (also auch ihres Scheitels und ihrer Achse) definieren. Vergleicht man aber die Kurven der Reihe miteinander, oder betrachtet man den Übergang von Kurve zu Kurve, so sind einige Koeffizienten durchaus konstant oder permanent (sie bleiben nicht nur bei einer, sondern bei allen Kurven der Reihe erhalten), andere sind veränderlich. Damit nun das Gesetz der Kurvenreihe gegeben sei, ist es nötig, daß in den Koeffizienten nur eine einzige Veränderlichkeit übrig bleibt. Wenn daher in der primären für alle Kurven gültigen Gleichung, die ihre gemeinsame Natur ausdrückt, noch mehrere veränderliche Koeffizienten vorhanden sind, so muß es noch andere hinzukommende Gleichungen geben, die die Abhängigkeit der veränderlichen Koeffizienten ausdrücken, mit deren Hilfe sie alle bis auf einen aus der ursprünglichen Gleichung beseitigt werden können. Hinsichtlich des Schnitts von zwei äußerst benachbarten Linien, welche durch ihr Zusammentreffen einen Punkt der gesuchten Kurve bestimmen (die sie auch berühren sollen), ist übrigens klar, daß zwar zwei zusammentreffende, welche die durch das Zusammentreffen entstehende Linie berühren, da sind, aber ein einziger Schnittpunkt oder Treffpunkt, so daß auch die ihm entsprechende Ordinate eine einzige ist. Anders ist es bei der gewöhnlichen Aufsuchung der geraden und krummen Linien (wie Kreise, Parabeln usw.), die eine vorgelegte berühren, und die man aus den Ordinaten der gegebenen Kurve bestimmen soll. Da denkt man sich zwei Ordinaten, aber immer nur eine Tangente. Was daher die gegenwärtige Rechnung betrifft, wo aus geraden oder krummen Tangenten, die ihrer Lage nach gegeben sind, die Ordinaten selbst aufgesucht werden (umgekehrt wie gewöhnlich), so bleiben die Koordinaten x und y bei diesem Übergang (zum äußert Benachbarten) ungeändert, unterliegen also nicht der Differentiation. Dagegen werden die Koeffizienten (die bei der gewöhnlichen Rechnung als nicht der Differentiation unterliegend betrachtet werden, weil sie Konstanten sind) hier differenziert, weil sie Veränderliche sind. Bemerkens-

wert ist aber der Fall, wo alle innerlichen Koeffizienten permanent sind, und daher die in bestimmter Anordnung zusammentreffenden Kurven untereinander kongruent sind. Dann kann man sich auch denken, daß sie die Spuren einer und derselben bewegten Linie sind, und die durch ihr Zusammentreffen entstehende Kurve wird dann die bewegte Linie während der Dauer der Bewegung fortwährend berühren. Es ergibt sich also in diesem Falle ein gewisser Zusammenhang mit der Erzeugung der Trochoiden. Denn auch die Basis, auf der die Erzeugende der Trochoide rollt, berührt die Erzeugende während der Dauer der Bewegung.

Die Rechnung wird aber in folgender Weise anzustellen sein. Man nehme irgend einen festen rechten Winkel. Wir wollen uns denken, daß seine Schenkel, die beliebig verlängert werden, zwei Bezugsachsen für die Kurven bilden, d. h. eine Achse mit der konjugierten Achse. Die von einem beliebigen Kurvenpunkte auf sie gefällten Lote werden die Ordinate x und die konjugierte Ordinate oder Abszisse y sein, mit einem Wort: die Koordinaten x und y. Sucht man aus den Daten die Beziehung zwischen ihnen, so erhält man die Gleichung (1), die wir kurz vorher die primäre genannt haben, da sie allen Punkten der sämtlichen in bestimmter Anordnung genommenen Kurven gemein ist. Wenn in der Gleichung (1) mehrere veränderliche Koeffizienten, wie b, c, stecken, so wird ihre Abhängigkeit durch eine sekundäre Gleichung (2), und zwar durch eine oder mehrere gegeben sein. Beseitigt man nun aus Gleichung (1) die veränderlichen Koeffizienten bis auf einen b, so ergibt sich eine Gleichung (3). Durch Differentiation dieser Gleichung möge die Gleichung (4) entstehen. Da in ihr das Differential von b als einziges vorkommt, so wird der differentielle Charakter ganz verschwinden, und wir haben also auch eine gewöhnliche Gleichung (4). Beseitigen wir mit ihrer Hilfe aus Gleichung (3) die noch übrig gebliebene Veränderliche b, so erhalten wir eine Gleichung (5), in der außer x und y nur noch unveränderliche Koeffizienten (wie a) da sein werden. Das ist dann die Gleichung für die gesuchte durch das Zusammentreffen der Reihe von Linien entstehende Kurve, also für die gemeinsame Berührende der Linienreihe. Die Rechnung kann aber auch anders angestellt werden, sobald die Leichtigkeit dazu einladet, nämlich so, daß man nicht sogleich die Veränderlichen beseitigt, sondern sie beibehält. Wenn nämlich die primäre Gleichung (1) und die sekundäre

Gleichung (2) (eine oder mehrere, die die Abhängigkeit der veränderlichen Koeffizienten ausdrücken sollen) gegeben sind, so differentiiere man die Gleichung (1), so daß (3) entsteht, und die Gleichung (2), so daß (4) entsteht (eine oder mehrere Gleichungen, wenn statt Gleichung (2) mehrere da waren). Auf diese Weise werden wir mehrere Differentiale haben aber doch auch genug Gleichungen, um sie zu beseitigen; und wenn auch nur die Differentiale bis auf eins beseitigt werden können, so wird auch das noch übrig bleibende von selbst fortgehen, und es wird sich auf diese Weise eine gewöhnliche Gleichung (5) ergeben, d. h. eine Gleichung, in der kein Differential vorkommt. Verbindet man sie mit den Gleichungen (1) und (2), so lassen sich alle veränderlichen Koeffizienten beseitigen, und es ergibt sich eine Gleichung (6), die die Natur der gesuchten Kurve ausdrückt, welche durch das Zusammentreffen der Linien entsteht. Diese Gleichung wird dieselbe sein wie die Gleichung (5) der vorigen Rechnung.

Mit dieser Methode lassen sich nun unzählige Probleme der höheren Geometrie lösen, die man bisher nicht bewältigen

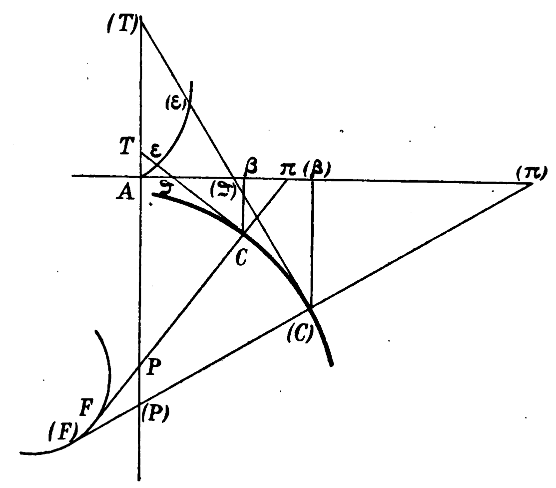


Fig. 9.

konnte, und die mit der umgekehrten Tangentenmethode zusammenhängen. Hiervon will ich einiges zur Probe angeben, das immerhin von großer Allgemeinheit ist, z. B. folgendes.

Es sei (Fig. 9) eine Relation gegeben zwischen AT und $A\vartheta$, den durch die Kurventangente CT gebildeten Achsenabschnitten[24]). Es wird verlangt, die Kurve CC zu finden. Hier sind nämlich die die Kurve berührenden Geraden in bestimmter Anordnung der Lage nach gegeben, also auch die gesuchte Kurve, da sie durch ihr Zusammentreffen entsteht. Auch wenn zu jedem Punkt T der Achse auf der gegebenen Linie EE ein Punkt E so gegeben ist, daß die Gerade TE, wenn nötig verlängert, die gesuchte Kurve CC berührt, so ist nach dem Gesagten klar, daß man die Kurve CC nach der hier vorgeschriebenen Methode erhält. Ebenso läßt sich, wenn zwischen AP und $A\pi$, den durch die Kurvennormale PC gebildeten Achsenabschnitten, eine Relation gegeben ist, die Kurve CC finden[25]). Da nämlich die Geraden $P\pi$ in bestimmter Anordnung der Lage nach gegeben sind, ist auch die Linie FF gegeben, die durch ihr Zusammentreffen entsteht. Durch ihre Abwicklung wird aber die gesuchte Kurve CC beschrieben. Es lassen sich hier unendlich viele Kurven angeben, die genügen; sie sind alle unter sich parallel und werden durch die Abwicklung derselben Linie zusammen beschrieben. Wenn also eine Relation zwichen AP und $A\pi$ gegeben ist, so läßt sich eine Kurve angeben, die nicht nur der gewünschten Bedingung genügt, sondern auch durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht. Indessen ist in diesem Falle die Kurve CC nicht immer eine gewöhnliche, da sie ja nicht selbst, sondern ihre Erzeugende, aus der sie durch Abwicklung hervorgeht, durch das Zusammentreffen von Geraden entsteht, die der Lage nach gegeben sind. Sicher hat man, wenn die Kurve selbst durch das Zusammentreffen entsteht, eine bestimmte, und es ist nicht mehr ein Punkt beliebig wählbar, durch den sie hindurchgeht; das ist in dieser Lehre eine nützliche Unterscheidung.

Wir wollen nun ein Beispiel unseres Kalküls bei einem ebenfalls allgemeinen Problem geben, das aber doch auf eine spezielle Linie angewandt ist. Gegeben ist die Beziehung der Normale PC zu ihrem Achsenabschnitt AP; man soll die Linie CC finden. Da die Punkte P, die Kreismittelpunkte, ihrer Lage nach gegeben sind, und die Radien PC ihrer Größe nach (wegen der gegebenen Beziehung zu AP), so sind in bestimmter Anordnung Kreise gegeben, die die Linie CC berühren. Es läßt sich also diese Linie selbst erhalten, da sie durch das Zusammentreffen der

Kreise entsteht[26]). Das hatten wir schon mit einem kurzen Wort früher angegeben in den Acta vom Juni 1686 gegen Ende der Abhandlung. Man beschreibe nun also um den Mittelpunkt P mit dem der Größe nach gegebenen Radius PC den Kreis CF. Um hier die kurz zuvor angegebene Methode anzuwenden, ziehe man von jedem Punkte F des Kreises die Senkrechten zu den Schenkeln des rechten Winkels PAH, d. h. die Koordinaten $FG = y$ und $FH = x$ (die im Falle des Zusammentreffens zweier Kreise in CB und CL fallen); es sei $AP = b$ und $PC = c$. Dann wird nach der Natur des Kreises

$$(1) \qquad xx + yy + bb = 2bx + cc.$$

Das ist die primäre Gleichung, die allen unseren Kreisen und allen Punkten eines jeden gemeinsam ist. Da aber die Beziehung zwischen AP und PC gegeben ist, so wird die Kurve EE gegeben sein, deren Ordinate PE gleich PC ist. Nehmen wir (beispielsweise) an, daß diese Kurve eine Parabel mit dem Parameter a ist, so wird

$$(2) \qquad ab = cc.$$

Dies ist die sekundäre Gleichung, die die Beziehung oder Abhängigkeit zwischen c und b ausdrückt. Beseitigt man mit ihrer Hilfe c, so wird aus der Gleichung (1)

$$(3) \qquad xx + yy + bb = 2bx + ab.$$

Es ist aber klar, daß in der Gleichung (1) außer den Koordinaten x und y die Koeffizienten c, b, a auftreten, von denen c und b bei einem und demselben Kreis konstant sind, und zwar ist c für den Kreis innerlich, weil es seinen Radius angibt; b ist äußerlich, weil es die Lage des Mittelpunkts angibt. Beide sind beim Variieren der Kreise veränderlich, a dagegen durchaus konstant oder permanent, da es nicht nur für alle Punkte eines Kreises, sondern auch für alle Kreise in der Gleichung dasselbe bleibt. Nun differentiiere man die auf den einen veränderlichen Koeffizienten b reduzierte Gleichung nach b (der einzigen Größe in ihr, die der Differentiation unterliegt). Dadurch entsteht

$$2bdb = 2xdb + adb$$

oder (da db herausgeht)

$$(4) \qquad b = x + a : 2.$$

(Diese Rechnung im Falle einer einzigen der Differentiation unterliegenden Größe fällt in der Durchführung mit der alten von *Fermat*[27]) angegebenen und von *Hudde*[28]) geförderten Methode der Maxima und Minima zusammen, die aber nur ein Corollar der unserigen ist.) Beseitigt man mit Hilfe der Gleichung (4) in Gleichung (3) den noch übrig gebliebenen veränderlichen Koeffizienten b, so entsteht

$$ax + aa : 4 = yy. \tag{5}$$

Das ist die Gleichung für die gesuchte Kurve CC. Dies zeigt uns, daß sie eine Parabel ist, die mit der gegebenen AE kongruent ist, aber nur etwas anders liegt. Verlängert man sie nämlich, so fällt sie mit ihrem Scheitel V auf die Achse AP, aber über den Scheitel A der gegebenen AE, so daß der Abstand AV der Scheitel der vierte Teil des gemeinsamen Parameters ist. Will man lieber die andere Rechnungsweise mit mehreren Differentialen, so nehme man wieder die Gleichungen (1) und (2) und differenziere sie. Aus (1) entsteht dann

$$bdb = xdb + cdc \tag{3}$$

und aus (2)

$$adb = 2cdc. \tag{4}$$

Beseitigt man mit Hilfe von (3) und (4) dc, so fällt zugleich db heraus, und es entsteht

$$b = x + a : 2 \tag{5}$$

wie kurz vorher. Beseitigt man jetzt mittels (1), (2), (5) die veränderlichen Koeffizienten c und b, so ergibt sich

$$ax + aa : 4 = yy \tag{6}$$

als Gleichung der gesuchten Linie, wie vorhin.

Wir haben auf diese Weise gelehrt, die Linie CC zu bilden, wenn die Beziehung der Normale PC zu dem eignen Achsenabschnitt AP gegeben ist, weil dann in bestimmter Anordnung Kreise gegeben sind, die die Linie berühren. Wenn dagegen die Beziehung der geradlinigen Tangente TC zu dem eignen Achsenabschnitt AT gegeben ist (oder wenn in bestimmter Anordnung Kreise gegeben sind, die die Linie senkrecht schneiden), so ist, um die CC zu finden, eine andere Methode nötig. Man kann eine solche Linie durch die Zugkonstruktion erhalten, die von uns im September vorigen Jahres in diesen Acta entwickelt worden ist. Unsere gegen-

wärtige Methode ist aber außerdem bei mehreren andern Problemen der höheren Geometrie von Nutzen oder auch bei mechanischen und physischen. Wenn es sich nämlich darum handelt, eine Figur zu bilden, die in jedem gegebenen Punkte ihrer Begrenzungslinie eine gewisse Forderung erfüllt, so gelangen wir oft zum Ziele, indem wir sie durch das Zusammentreffen von Linien bilden, deren jede in einem Punkte der Forderung genügt, natürlich gerade in dem Treffpunkt. Auf diese Weise habe ich schon früher in einer Abhandlung über die optischen Linien eine Darstellungsart der Linien gefunden, welche Strahlen, die in bestimmter Anordnung ihrer Lage nach gegeben sind oder von einem Spiegel gegebener Gestalt herkommen, konvergent oder divergent oder parallel machen. Eine solche Linie entsteht nämlich durch das Zusammentreffen von Ellipsen, wenn die Strahlen konvergent werden sollen, und dieselbe Methode gilt, wenn sie parallel oder divergent zu machen sind.



VI. Ein neues Beispiel der Analysis für die Wissenschaft des Unendlichen bezüglich der Summen und Quadraturen.

(Acta Eruditorum, 1702.)

Wie in der Algebra die Potenzen und die Wurzeln die Umkehrungen voneinander sind, so in der Infinitesimalrechnung die Differenzen und die Summen; und wie in der Algebra oder in der allgemeinen Wissenschaft von der endlichen Größe das Hauptziel die Ausziehung der Wurzeln der Formeln ist, so ist es in der Wissenschaft vom Unendlichen die Auffindung der Summen der Reihen, die, wenn sie aus Gliedern bestehen, die kontinuierlich oder elementar wachsen, nichts anderes sind als Quadraturen oder Inhalte von Figuren. Und in ähnlicher Weise wie einige Wurzeln rein sind, wenn ihre Werte nur aus bekannten Größen erhalten werden, andere affiziert, wenn ihre eigenen Potenzen in dem Wert vorkommen, so sind auch die zu summierenden Größen entweder rein und durchaus bekannt, oder sie enthalten wieder die gesuchte Summe, z. B. wenn

$$dy = yxdx : (ax + yy)$$

ist, wo die gesuchte Summe y in dem Wert des zu summierenden dy vorkommt. Und in beiden Fällen gehört eine besondere Kunst dazu (die, wie allgemein bekannt, noch nicht ausgebildet ist), um die affizierten Ausdrücke auf reine zurückzuführen. In der Infinitesimalrechnung bedeutet das, Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (erster Ordnung, zweiter Ordnung usw.) auf Quadraturen zurückzuführen, also unter Voraussetzung der Quadraturen aus einer gegebenen Tangenten- oder Osculationseigenschaft beliebiger Ordnung die Linie zu finden. Bei den Quadraturen selbst aber ist es wieder eine Sache von großer Bedeutung, was wir hier behandeln, nämlich

die verwickelteren auf einfachere zurückzuführen. Dies ist die Analysis der Quadraturen, in der ich seit vielen Jahren einige Fortschritte gemacht habe. Als ich nämlich kaum meine arithmetische Quadratur gefunden hatte, durch Reduktion der Kreisausmessung auf eine rationale Quadratur, und herausgekommen war, daß

$$\int dx : (1 + xx)$$

von der Quadratur des Kreises abhängt, bemerkte ich bald, daß alle Quadraturen, die auf die Summation einer rationalen Formel reduziert sind, eben deshalb schließlich auf gewisse ganz einfache Grundsummationen zurückgeführt werden können. In welcher Weise dies zu geschehen hat, werden wir durch eine neue Art Auflösung zeigen, und zwar dadurch, daß ein Multiplikationsprodukt in ein additiv zusammengesetztes Ganzes verwandelt wird, d. h. durch Umformung eines Bruches, dessen Nenner durch fortgesetzte Vermehrung seiner Wurzeln beliebig erhöht ist, in ein Aggregat von Brüchen, die nur einfache Nenner haben. Von einer rationalen Größe oder Formel aber spreche ich hier, wenn die unbestimmte Größe, wie an dieser Stelle x, ungebunden auftritt; denn ob die Konstanten rational oder irrational sind, wird nicht beachtet.

Es sei irgend eine endliche rationale Formel

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots}{\lambda + \mu x + \xi x^2 + \pi x^3 + \ldots}$$

gegeben. Man kann dann, behaupte ich, zeigen, daß sie nach Abzug der rein ganzen Bestandteile gleich einem Aggregat von Brüchen ist, deren Zähler konstant, d. h. frei von x, während der Nenner einfach ist, so daß jeder dieser Brüche die Form $a : (x + b)$ hat. Wie das geschehen kann, zeige ich auf folgende Weise. Zunächst setze ich aus der Algebra voraus, daß die einfachen Teiler jeder ganzen rationalen Formel irgendwie bekannt sind; sie sind nämlich dieselben wie die Wurzeln der Gleichung, die entstehen würde, wenn man die Formel als Gleichung betrachtete. So hat z. B. die Formel

$$xx - (a + b)x + ab$$

die Divisoren $x - a$ und $x - b$, und dieselbe Formel hätte, wenn sie eine Gleichung, d. h. gleich Null wäre, eben diese Größen gleich Null gesetzt als Wurzeln, so daß x den Wert a oder b hätte. Man erhält daher unter Voraussetzung der algebraischen

Auflösung der Gleichungen die Teile der Formeln, und unsere vorliegende infinitesimale Analysis setzt als die höhere die algebraische Analysis als die niedere voraus. Wir wollen jetzt die vorgelegte Formel des Nenners, nämlich

$$\pi x^3 + \xi x^2 + \mu x + \lambda,$$

oder eine andere höhere, nötigenfalls durch π dividieren und zu

$$x^3 + \frac{\xi}{\pi}x^2 + \frac{\mu}{\pi}x + \frac{\lambda}{\pi}$$

machen. Ihre Teiler wollen wir gleich $x + b$, $x + c$, $x + d$ usw. setzen und sie zur Abkürzung mit l, m, n usw. bezeichnen. Dann läßt sich der vorgelegte Bruch

$$\frac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi}x + \frac{\gamma}{\pi}x^2 + \frac{\delta}{\pi}x^3}{x^3 + \frac{\xi}{\pi}x^2 + \frac{\mu}{\pi}x + \frac{\lambda}{\pi}}$$

in die folgenden zerlegen:

$$\frac{\alpha : \pi}{lmn} + \frac{\beta x : \pi}{lmn} + \frac{\gamma x^2 : \pi}{lmn} + \frac{\delta x^3 : \pi}{lmn}.$$

Ich behaupte nun, daß jeder von diesen sich auf einen solchen zurückführen läßt, wie es der erste $\frac{\alpha : \pi}{lmn}$ ist. Wir wollen daher zunächst diesen auflösen und dann zeigen, wie die übrigen auf ihn reduziert werden.

Unter Vernachlässigung des konstanten Zählers, der bei Summationen garnicht stört, schreiten wir nun zur Auflösung der Brüche

$$\frac{1}{lm}, \quad \frac{1}{lmn}, \quad \frac{1}{lmnp} \text{ usw.}$$

oder allgemeiner des Bruches

$$\frac{1}{lmnpq\ldots},$$

wobei, wie gesagt, $l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$, $p = x + e$, $q = x + f$ gesetzt ist und so fort. Dies fest-

gesetzt, habe ich gefunden, was jeder jetzt durch den Versuch leicht beweisen kann, daß

$$\frac{1}{lm} = \frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(b-c)m},$$

$$\frac{1}{lmn} = \frac{1}{(c-b)(d-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)m} + \frac{1}{(b-d)(c-d)n},$$

$$\frac{1}{lmnp} = \frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)m} + \frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)n} + \frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)p}$$

ist und so fort. Aus dem Anblick geht der gleichförmige und regelmäßige Fortgang ins Unendliche klar hervor. Damit aber, wer es will, die Richtigkeit durch den Versuch leicht beweisen kann[29], brauchen wir es nur z. B. im ersten Falle vorzumachen:

$$\frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(b-c)m} = \frac{bm - cm + cl - bl}{(2bc - bb - cc)lm}.$$

Setzt man nun für l, m im Zähler die Werte $x+b$, $x+c$ ein, so wird
$bm - cm + cl - bl = bx + bc - cx - cc + cx + cb - bx - bb$
oder (da die Glieder mit der Unbestimmten x sich aufheben) gleich

$$2bc - bb - cc.$$

Also wird

$$\frac{bm - cm + cl - bl}{(2bc - bb - cc)lm} = \frac{2bc - bb - cc}{(2bc - bb - cc)lm} = \frac{1}{lm}.$$

wie behauptet wurde.

Jetzt werden wir alle Brüche

$$\frac{x}{lmn\ldots}, \quad \frac{x^2}{lmn\ldots}, \quad \frac{x^3}{lmn\ldots},$$

deren Zähler nicht konstant ist, auf Brüche mit einem konstanten Zähler, wie

$$\frac{\alpha}{lmn\ldots}$$

zurückführen. Ich habe nun wieder gefunden was folgt:

Allgemeine Regeln, um Brüche mit unbestimmtem Zähler, die nicht unbestimmte Ganze enthalten, in Brüche mit konstantem Zähler aufzulösen[30].

$$l = x + b,\ m = x + c,\ n = x + d,\ p = x + e, \ldots$$

$$\frac{x}{l\,..} = \frac{1}{..} - \frac{b}{l\,..},$$

$$\frac{x^2}{lm\,..} = \frac{1}{..} - \frac{b+c}{m\,..} + \frac{bb}{lm\,..},$$

$$\frac{x^3}{lmn\,..} = \frac{1}{..} - \frac{b+c+d}{n\,..} + \frac{bb+cc+bc}{mn\,..} - \frac{b^3}{lmn\,..},$$

$$\frac{x^4}{lmnp\,..} = \frac{1}{..} - \frac{b+c+d+e}{p\,..} + \frac{bb+cc+dd+bc+bd+cd}{np\,..} - \frac{b^3+c^3+bbc+bcc}{mnp\,..} + \frac{b^4}{lmnp\,..}$$

Die Punkte .. deuten die zu ergänzenden Buchstaben an, so daß, wenn nötig, diese für jene gesetzt werden können. Wenn z. B. statt $\frac{x}{l\,..}$ gegeben wäre $\frac{x}{lmn}$, so würde an Stelle von

$$\frac{x}{l\,..} = \frac{1}{..} - \frac{b}{l\,..}$$

hervorgehen

$$\frac{x}{lmn} = \frac{1}{mn} - \frac{b}{lmn}.$$

Formelreihen, die die Regeln angeben, um Brüche mit unbestimmtem Zähler, die unbestimmte Ganze enthalten, in ihre Ganzen und in Brüche mit konstantem Zähler aufzulösen[31].

$$\frac{x^2}{l} = x - b + \frac{bb}{l},$$

$$\frac{x^3}{lm} = x - \frac{b+c}{l} + \frac{bb+cc+bc}{m} - \frac{b^3}{lm},$$

$$\frac{x^4}{lmn} = x - \frac{b+c+d}{l} + \frac{bb+cc+dd+bc+bd+cd}{n} - \frac{b^3+c^3+bbc+bcc}{mn} + \frac{b^4}{lmn},$$

usw.

$$\frac{x^3}{l} = xx - bx + bb - \frac{b^3}{l},$$

$$\frac{x^4}{lm} = xx - \frac{b+c}{l}x + \frac{bb+cc+bc}{l} - \frac{b^3+c^3+bbc+bcc}{m} + \frac{b^4}{lm}, \text{ usw.}$$

Der Fortgang jeder Reihe und der Reihen selbst ins Unendliche geht aus dem Anblick, besonders der Kolonnen, klar hervor. In jedem Gliede ist der konstante Zähler die vollständige Formel des betreffenden Grades, aus den ihr zukommenden Buchstaben gebildet, so einfach, daß sie durch keine Koeffizienten verändert wird. So ist

$$bb + cc + dd + bc + bd + cd$$

die vollständige Formel zweiten Grades gebildet aus den Buchstaben b, c, d ohne Koeffizienten, also bestehend aus dem Aggregat der Quadrate und Rechtecke.

Wenn man nun l, m, n, p usw. fortnehmen und wieder die Werte $x + b$, $x + c$, $x + d$, $x + e$ usw. für sie einsetzen will, so werden die obigen Theoreme lauten, wie aus den nachstehenden Beispielen ersichtlich ist:

$$\frac{1}{\begin{array}{ccccccccc} x^4 & + & bx^3 & + & bcx^2 & + & bcdx & + & bcde \\ & & c & & bd & & bce & & \\ & & d & & be & & bde & & \\ & & e & & cd & & cde & & \\ & & & & ce & & & & \\ & & & & de & & & & \end{array}}$$

ist identisch mit

$$\frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)(x+b)} + \frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)(x+c)}$$
$$+ \frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)(x+d)} + \frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)(x+e)},$$

und

$$\frac{x^3}{\begin{array}{ccccccccc} x^4 & + & bx^3 & + & bcx^2 & + & bcdx & + & bcde \\ & & c & & bd & & bce & & \\ & & d & & be & & bde & & \\ & & e & & cd & & cde & & \\ & & & & ce & & & & \\ & & & & de & & & & \end{array}}$$

ist identisch mit

$$\frac{1}{x+e} - \frac{b+c+d}{\begin{array}{ccccc} x^2 & + & dx & + & de \\ & & e & & \end{array}} + \frac{bb+cc+bc}{\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & cx^2 & + & cdx & + & cde \\ & & d & & ce & & \\ & & e & & de & & \end{array}} - \frac{b^3}{\begin{array}{ccccccccc} x^4 & + & bx^3 & + & bcx^2 & + & bcdx & + & bcde \\ & & c & & bd & & bce & & \\ & & d & & be & & bde & & \\ & & e & & cd & & cde & & \\ & & & & ce & & & & \\ & & & & de & & & & \end{array}}.$$

Es wäre der Mühe wert, jeden Bruch dieses Ausdrucks, wie ihn das zweite Beispiel liefert, wieder in einen aus einfachen Brüchen zusammengesetzten Ausdruck aufzulösen, nach Art des Ausdrucks, den das erste Beispiel liefert, und auf diese Weise eine neue Reihe von Theoremen zu geben, um die Werte der Brüche

$$\frac{x}{lmnp\,..},\ \frac{x^2}{lmnp\,..},\ \frac{x^3}{lmnp\,..}\ \text{usw.}$$

ebenso wie $\frac{1}{lmnp\,..}$, durch ein aus einfachen Brüchen zusammengesetzes Aggregat darzustellen, wenn dieser Platz es erlaubte.

Hieraus geht also klar hervor, daß sich jeder rationale Bruch auf einfache rationale Brüche mit konstantem Zähler zurückführen läßt, ich meine rational in bezug auf die Unbestimmte x, die ungebunden auftreten muß. Wäre daher ein Bruch zur Auflösung gegeben wie

$$(2xx + x\sqrt{2} + \sqrt{5}) : (xx + 2x + \sqrt{3})$$

oder käme bei der Auflösung ein einfacher Bruch vor wie der Bruch

$$\sqrt{2} : (x + \sqrt{3}),$$

so gilt er in dieser Art von Analysis als rational, weil eine Irrationalität, die keine Unbestimmten enthält, diese Analysis der Summationen nicht stört. Insofern ist hier die Zurückführung der irrationalen auf rationale Ausdrücke bequemer als in dem diophantischen Kalkül der figurierten Zahlen. Es gilt daher, mögen auch die Wurzeln irrational sein, wenn sie nur reell und nicht imaginär sind, folgendes: Bei der Summierung rationaler numerischer Reihen, die von bestimmtem Grade sind, oder wo die Unbestimmte in keinen Exponenten eingeht, läßt sich die Sache immer auf eine Summe von Zahlen einer harmonischen Progression oder von Potenzen derselben zurückführen oder, wenn sie sich aufheben, auf eine konstante Größe, d. h. die absolute Summe, oder wenigstens auf eine Reihe von Ganzen, die bei Rationalen vom dritten Grade für einen endlichen Teil der Reihe immer summiert werden kann. Bei der Summierung rationaler Ordinatenreihen dagegen, d. h. bei den Quadraturen rationaler algebraischer Figuren, reduziert sich, wenn die Wurzeln reell sind, immer alles auf die Quadratur

der Hyperbel. Man kommt also (um das zuerst zu entwickeln) bei der Summierung numerischer Reihen darauf zurück, alle $\frac{1}{y}$ oder alle $\frac{1}{yy}$ oder alle $\frac{1}{y^3}$ usw. zu summieren, wobei $y = x + e$ gesetzt ist, $x + 2$ oder $x + \sqrt{3}$ oder anders, wie man will. Wenn nämlich x gleich 1 oder 2 oder 3 usw. ist und e die Konstante 2, so wird die Reihe der Zahlen $\frac{1}{x+e}$ oder $\frac{1}{y}$ lauten

$$\frac{1}{1+2},\ \frac{1}{2+2},\ \frac{1}{3+2},\ \frac{1}{4+2}\ \text{usw.}$$

Wenn aber x gleich 1 oder 3 oder 5 oder 7 usw. ist und e die Konstante $\sqrt{3}$, dann wird die Reihe aller $\frac{1}{y}$ lauten

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}},\ \frac{1}{3+\sqrt{3}},\ \frac{1}{5+\sqrt{3}},\ \frac{1}{7+\sqrt{3}}\ \text{usw.}$$

D. h. wenn x oder y eine arithmetische Progression bilden, sei es die natürliche oder irgend eine andere, dann werden die $\frac{1}{y}$ eine harmonische Progression bilden. Es wird daher $\int \frac{dy}{y}$ bei den Zahlen die Summe einer harmonischen Reihe sein und $\int \frac{dy}{yy}$, $\int \frac{dy}{y^3}$ usw. die Potenzsummen der Glieder einer harmonischen Progression. Hierauf kommt also die Sache zurück, wenn von bestimmtem Grad rationale numerische Reihen, endliche oder, falls es geschehen kann, unendliche, summiert werden sollen, und die Formel des Bruches nur reelle Wurzeln hat. Und obgleich die harmonische Reihe mit einer unendlichen Gliederzahl auch der Größe nach unendlich ist und daher nicht summiert werden kann (was bei den Reihen von Potenzen harmonischer Glieder anders ist), so kann die Differenz zwischen zwei Reihen harmonischer Progression, mögen sie auch unendlich sein, doch eine endliche Größe bilden. Für besonders bemerkenswert halte ich folgendes. Wenn man die absolute Summierung hat, unabhängig von der Summation harmonischer Glieder und ihrer Potenzen, so heben sich bei dieser unserer Analysis die harmonischen und andern weniger

leicht zu behandelnden Reihen auf, und es zeigt sich ganz von selbst die Summe. Z. B. ist

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35} \text{ usw.}$$

oder

$$\int \frac{dx}{xx-1},$$

wobei man x gleich 2 oder 3 oder 4 usw. zu setzen hat, eine Reihe, die ganz bis ins Unendliche genommen summiert werden kann, und dx ist hier 1. Im Numerischen sind nämlich die Differenzen angebbare Größen. $\frac{1}{xx-1}$ wird nun nach unserer Regel (wegen des Wertes von $\frac{1}{lm}$, da hier $l = x + 1$ und $m = x - 1$, also $b = 1$ und $c = -1$ ist)

$$\frac{1}{-2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}$$

oder

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right\},$$

und es ist

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \text{ usw.}\right),$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{2}\left(* \quad * -\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5} \text{ usw.}\right),$$

Folglich wird sein

$$\int\frac{dx}{xx-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2} \ * \ * \ *\right)=\frac{3}{4}$$

Schließlich wird also sein

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35} \text{ usw.}$$

Diese Summierung habe ich, wie ich mich erinnere, schon früher mit meiner arithmetischen Quadratur herausgegeben. Auf ähnlichem Wege werden die übrigen Summierungen rationaler Reihen, die von bestimmtem Grade und reell auflösbar sind, gefunden oder auf harmonische und ihre Potenzen zu-

rückgeführt. Über die imaginäre Auflösung, die ebenfalls nützlich ist, werden wir bald sprechen, und das kann dann gleich auch für die rationalen Reihen bestimmten Grades dienen.

Es seien nunmehr die x oder y nicht diskrete Glieder, sondern kontinuierlich, d. h. nicht Zahlen, die um ein angebbares Intervall verschieden sind, sondern geradlinige Abszissen, die kontinuierlich oder elementar, d. h. in unangebbaren Intervallen wachsen, so daß die Reihe ihrer Endpunkte eine Figur bildet. Dann ergibt sich in derselben Weise, daß alle Summen rationaler Brüche konstanten Grades, d. h. alle Quadraturen rationaler algebraischer Figuren, wenn man die Wurzeln der den Nenner bildenden Formel als reell voraussetzt, entweder absolut gefunden oder auf die Quadratur der Hyperbel zurückgeführt werden können. Man kommt nämlich, abgesehen von den zu summierenden Ganzen, wie $\int dx$, $\int xdx$, $\int xxdx$ usw. auf einfache Quadraturen zurück, wie[32])

$$\int\frac{dy}{y},\ \int\frac{dy}{y^2},\ \int\frac{dy}{y^3}\ \text{usw.},$$

wo $y = x + e$ gesetzt ist. Bei den Quadraturen sind aber

$$\int\frac{dy}{y^2},\ \int\frac{dy}{y^3}\ \text{usw.}$$

immer bekannt. Es bleibt also nur $\int\frac{dy}{y}$ übrig, d. h. die Quadratur der Hyperbel. Aber viel zu fest hält an ihrer schönen Mannigfaltigkeit die Natur, die Mutter ewiger Mannigfaltigkeit, oder besser, der göttliche Geist, als daß er gestattete, alles unter eine Gattung zusammenzufügen. Und so findet er einen feinen und wunderbaren Ausweg in jenem Wunder der Analysis, einer Mißgeburt der Ideenwelt, einem Doppelwesen fast zwischen Sein und Nichtsein, was wir eine imaginäre Wurzel nennen. So oft daher der Nenner des rationalen Bruches imaginäre Wurzeln hat, was auf unendlich viele Weisen eintritt, würde auch die Hyperbel, deren Quadratur man braucht, imaginär werden und ließe sich auf keine Weise konstruieren.

Alle imaginären Wurzeln haben aber ihre Gefährten; denn sie entstehan durch Ausziehen der Quadratwurzel aus einer negativen Größe, und jede quadratische Wurzelziehung ist eine doppelte, da ihrem Symbol $\sqrt{\ldots}$ + oder — vorgesetzt werden kann. Es entsteht daher, wenn man imaginäre Wurzeln

in passender Weise miteinander multipliziert, ein reelles Produkt. Entweder ist dieses der Nenner selbst, und in diesem Falle läßt sich hier (wenn der Bruch auf einen konstanten Zähler zurückgeführt und, wenn man will, das zweite Glied in der Formel beseitigt wird) die vorgelegte Quadratur auf keine einfachere zurückführen. Oder das Produkt ist ein reeller Teiler des Nenners, und mit seiner Hilfe hängt die vorgelegte Quadratur von einer andern einfacheren ab, wie es die Quadratur des Kreises ist. Es handle sich z. B. um den Bruch $\frac{1}{x^4-1}$. Offenbar sind die Wurzeln des Nenners

$$x+1,\ x-1,\ x+\sqrt{-1},\ x-\sqrt{-1}.$$

Sie geben miteinander multipliziert x^4-1. Nach der Regel wird nun $\frac{1}{x^4-1}$ gleich

$$\frac{1}{(-1-1)(\sqrt{-1}-1)(-\sqrt{-1}-1)(x+1)}$$
$$+\frac{1}{(1+1)(\sqrt{-1}+1)(-\sqrt{-1}+1)(x-1)}$$
$$+\frac{1}{(1-\sqrt{-1})(-1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})}$$
$$+\frac{1}{(1+\sqrt{-1})(-1+\sqrt{-1})(\sqrt{-1}+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})}$$
$$=-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4\sqrt{-1}(x+\sqrt{-1})}-\frac{1}{4\sqrt{-1}(x-\sqrt{-1})}.$$

Hier hängen

$$\int\frac{dx}{x+1}\quad\text{und}\quad\int\frac{dx}{x-1}$$

von der Quadratur der Hyperbel ab. Dagegen lassen sich

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{-1}-1}\quad\text{und}\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{-1}+1}$$

nur auf eine imaginäre Hyperbel zurückführen. Verbindet man so viele imaginäre Wurzeln unter sich, als zur Gewinnung eines

reellen Ausdrucks nötig ist, faßt man also hier die beiden letzten Brüche, nämlich

$$\frac{1}{4x\sqrt{-1}-4} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{4x\sqrt{-1}+4}$$

in einen zusammen, so ergibt sich

$$\frac{4(x\sqrt{-1}+1)-4(x\sqrt{-1}-1)}{4(x\sqrt{-1}-1)\,4(x\sqrt{-1}+1)},$$

d. h.

$$-\frac{1}{2(xx+1)}.$$

Wollten wir ebenso

$$-\frac{1}{4(x+1)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{4(x-1)}$$

in eins zusammenfassen, so würde daraus entstehen

$$\frac{1}{2(xx-1)}.$$

Faßt man

$$\frac{1}{2(xx-1)} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2(xx+1)}$$

in eins zusammen, so kommt wieder

$$\frac{1}{x^4-1},$$

welches also gleich

$$\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(xx+1)}$$

ist. Daraus geht hervor, daß

$$\int\frac{dx}{x^4-1} \quad \text{oder auch} \quad \int\frac{dx}{1-x^4}$$

von der Quadratur der Hyperbel und zugleich der des Kreises abhängt. Daß nämlich

$$\int\frac{dx}{x-1} \quad \text{und} \quad \int\frac{dx}{x+1}, \quad \text{also auch} \quad \int\frac{dx}{xx-1}$$

von der Quadratur der Hyperbel abhängen, war längst bekannt. Daß aber

$$\int\frac{dx}{xx+1}$$

von der Quadratur des Kreises abhängt, ist zuerst von mir mit meiner arithmetrischen Quadratur gefunden worden, und daraus habe ich ein Theorem abgeleitet, das ich am Anfang der Acta Lipsiensia veröffentlichte, daß nämlich, wenn das Quadrat des Durchmessers 1 ist, die Kreisfläche

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \text{ usw.}$$

wird. Es folgt hieraus, daß die Quadratur aller rationalen algebraischen Figuren, wo in dem Ausdruck der Ordinate der Nenner reelle Teiler ersten Grades, wie $x + e$ hat, auf die Quadratur der Hyperbel zurückgeführt werden kann. Wenn er jedoch reelle ebene Teiler, d. h. solche vom zweiten Grade, besitzt, wie $xx + fx + ag$ oder (nach Beseitigung des zweiten Gliedes) $xx \pm ae$ (die selbst keine reellen Wurzeln haben, weil sie sonst auf die erledigten Quadraturen führen), so hängt die Quadratur ab von der Quadratur der Hyperbel oder des Kreises oder beider.

Wir kommen in diesem Zusammenhang auf eine Frage von größter Wichtigkeit, ob nämlich alle rationalen Quadraturen auf die Quadratur der Hyperbel und des Kreises zurückgeführt werden können. Sie geht hier in unserer Analysis darauf zurück, ob jede reelle algebraische Gleichung oder Formel, die in bezug auf die Unbestimmte rational und ganz ist, sich in reelle einfache oder ebene Teiler auflösen läßt. Ich habe aber gefunden, daß der, der dies behauptete, die Fülle der Natur enger einschränken würde, als es berechtigt ist. Es sei

$$1 : (xx + aa\sqrt{-1}) \text{ mit } 1 : (xx - aa\sqrt{-1})$$

zu multiplizieren. Dann ergibt sich

$$1 : (x^4 + a^4).$$

Der Nenner ist hier gewiß eine reelle Formel. Löst man aber diese Formel auf, so gelangt man nicht zu reellen ebenen Teilern. Denn $xx - aa\sqrt{-1}$ kann aufgelöst werden in

$$x + a\sqrt{\sqrt{-1}} \quad \text{und} \quad x - a\sqrt{\sqrt{-1}}$$

und $xx + aa\sqrt{-1}$ in

$$x + a\sqrt{-\sqrt{-1}} \quad \text{und} \quad x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

Es ergibt sich daher die Formel $x^4 + a^4$, indem man

$$x + a\sqrt{\sqrt{-1}},\ x - a\sqrt{\sqrt{-1}},\ x + a\sqrt{-\sqrt{-1}},\ x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

miteinander multipliziert. Aber welche Kombination zweier von diesen vier Wurzeln wir auch vornehmen mögen, niemals werden wir erreichen, daß zwei miteinander multipliziert eine reelle Größe geben oder einen reellen ebenen Teiler[33]). Es läßt sich daher

$$\int dx : (x^4 + a)$$

durch unsere Analysis hier weder auf die Quadratur der Kreise noch auf die der Hyperbel zurückführen, sondern begründet eine neue von besonderer Art. Und ich würde wünschen (was ich anderwärts schon angedeutet zu haben mich erinnere), daß, wie $\int dx : (x + a)$ oder die Quadratur der Hyperbel bekanntlich die Logarithmen liefert, oder die Teilung des Verhältnisses, und $\int dx : (xx + aa)$ die Teilung des Winkels, so weiter die Reihe fortgesetzt werden könnte, und daß es bekannt wäre, welchem Problem $\int dx : (x^4 + a^4)$, $\int dx : (x^8 + a^8)$ usw. entspricht. Übrigens hängt, um das beiläufig hinzuzufügen,

$$\int x^{e-1} dx : (x^{2e} \pm a^{2e}),$$

also z. B.

$$\int x dx : (x^4 \pm a^4), \quad \int x^2 dx : (x^6 \pm a^6), \quad \int x^3 dx : (x^8 \pm a^8)$$

und so fort von der Quadratur des Kreises ab, wenn $\pm$ die Bedeutung $+$ hat, und von der Quadratur der Hyperbel, wenn es die Bedeutung $-$ hat. Ein in der Differentialrechnung Erfahrener erkennt das leicht. Es ließe sich aber auch aus der vorliegenden Analysis ableiten.

Eins vor allem bleibt jetzt noch zu fragen übrig, ob überhaupt und auf welche Weise Figuren mit irrationalen Ordinaten auf andere, rationale Figuren, die mit ihnen homometrisch sind (so daß bei gegebener Quadratur der einen die Quadratur der andern absolut oder rational gegeben ist), zurückgeführt und unserer Analysis hier unterworfen werden können. Ich habe in dieser Hinsicht viele Versuche gemacht und nicht ohne Erfolg, möchte aber doch noch nicht wagen, etwas genügend Allgemeines oder Hervorragendes zu versprechen. Ich habe auch, um die Wahrheit zu gestehen, nicht Zeit gehabt, den Gegenstand, wie er es verdient, zu behandeln. Deshalb hatte ich die Herausgabe der Methode verschoben, bis in der Zurückführung der Summierung von Irrationalen auf die Summierung von Rationalen größere Fortschritte möglich wären, und ich bewahrte diese ganze Lehre für mein Werk von der Wissenschaft des Unendlichen auf. Da ich aber sah, daß durch dieses Zögern der Fortschritt

der Kunst hinausgeschoben würde, und ich auch noch nicht genug über meine Zeit verfügen konnte, habe ich es vorgezogen, dem öffentlichen Nutzen zu dienen, auf die Hoffnung mich stützend, daß es Leute geben wird, die den Samen der neuen Lehre weiter ausstreuen und reichlichere Früchte ernten werden, besonders wenn man sich eifriger, als es bis jetzt geschehen ist, auf die Erweiterung der diophantischen Algebra legt, die von den Schülern *Descartes'* fast vernachlässigt wurde, weil sie ihren Nutzen in der Geometrie zu wenig erkannt hatten. Ich erinnere mich aber, schon mehr als einmal angedeutet zu haben (was wunderbar erscheinen konnte), daß der Fortschritt unserer auf die Quadraturen bezüglichen Infinitesimalanalysis zum großen Teil von dem weiteren Wachstum derjenigen Arithmetik abhängt, die zuerst, soweit uns bekannt ist, mit zielbewußter Bemühung *Diophant* behandelt hat. Und ich hoffe, daß das, was wir hier bieten, den Glauben zum Schauen bringen und als wirksamere Ermunterung zu weiterer Bearbeitung dienen wird.

VII. Fortsetzung der Analysis rationaler Quadraturen.

(Acta Eruditorum, 1703.)

Die summatorische Analysis der Rationalen, sei es bei Zahlen, sei es bei Quadraturen, hat, wie ich sehe, den Kennern außerordentlich gefallen. Denn es wird (um jetzt von den Summen von Zahlen zu schweigen) die transzendente Analysis der Linien, wo immer diese Methode Anwendung findet, zu ihrer Vollendung gebracht, weil alsdann immer für die Differentialgleichungen Exponentialgleichungen eingesetzt werden können. Man muß nämlich wissen, was ich längst bemerkt habe, daß der Ausdruck einer Linie durch eine Differentialgleichung den Nachteil hat, daß sie nicht als Ortsgleichung dienen kann und sich eigentlich nicht auf einen Punkt bezieht. Daher kommt es, daß sich durch sie nicht der Schnitt der Kurve mit einer andern Linie erhalten oder eine Unbekannte beseitigen läßt, und erst dann kann in solchen Fällen die Differentialgleichung etwas nützen, wenn es feststeht, daß die beiden Linien sich nicht nur treffen, sondern auch berühren. Die transzendente Exponentialgleichung der Kurve gestattet dagegen in vollkommener Weise alle analytischen Anwendungen, und man kann mit ihrer Hilfe nicht nur die Schnittpunkte bestimmen, sondern auch die Unbekannten beseitigen, und zugleich kommt dabei zum Vorschein, welches Problem sich von einem transzendenten auf ein gewöhnliches herabdrücken läßt; das geschieht nämlich, so oft die unbestimmten Größen aus dem Exponenten herausgehen oder gänzlich verschwinden. Wenn sich z. B. ergibt

$$b^{xx+yy} = c^{aa},$$

so wird

$$xx + yy = aa\,(\log c : \log b).$$

Das ist die Gleichung eines Kreises, und wenn das Verhältnis der Logarithmen von b und von c anders woher gegeben ist, so wird der Kreis in gewöhnlicher Weise konstruiert sein;

wenn nicht, so ist wenigstens erreicht, was erreicht werden sollte. Es ist nämlich zu bemerken, daß, so oft die Schwierigkeit nur in den Konstanten liegt, insofern als sie nicht algebraisch ausgedrückt werden können, der Grad nicht mehr unbestimmt und daher das Problem nicht mehr transzendent ist. Mag z. B. auch $\sqrt[e]{2}$ keine gewöhnliche Größe sein, wie wenn e die Irrationalzahl $\sqrt{2}$ ist, so wird sie doch von mir nicht transszendent genannt werden, sondern interszendent; denn sie fällt zwischen die gebräuchlichen Grade.

Aber dies sei beiläufig gesagt, damit man die Vortrefflichkeit dieser Analysis besser einsieht. Einen beliebigen in bezug auf die Unbestimmte rationalen Bruch kann man sich auf folgende Form gebracht denken, wobei t eine ganze rationale Zahl sein soll:

$$\frac{\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\beta}{\pi}x+\frac{\gamma}{\pi}x^2+\frac{\delta}{\pi}x^3+\text{usw.}}{x^t+\frac{\xi}{\pi}x^{t-1}+\frac{\mu}{\pi}x^{t-2}+\frac{\lambda}{\pi}x^{t-3}+\text{usw.}}.$$

Hiervon ziehe man zuerst die reinen Ganzen x^0, x^1, x^2, usw. ab, soviel es geschehen kann. Man dividiert zu diesem Zweck den Zähler durch den Nenner, falls dieser nämlich nicht von höherem Grade als jener ist. Dadurch erhält man sowohl den ganzen Quotienten als auch den gebrochenen Rest, wo der Nenner höher ist als der Zähler. Dieser Rest ist dann weiter zu behandeln, wie gleich gesagt werden wird. Nehmen wir jetzt an, daß der Nenner eine Formel ist, die keine gleichen Wurzeln hat. Ich behaupte, daß sich alsdann der Bruch in so viele Brüche zerlegen läßt, als es Wurzeln gibt, und jeder dieser Brüche von der Form

$$\frac{A}{x+B}$$

ist, so daß A und B konstante Größen sind. Ist daher eine Figur gegeben, deren Ordinate, wenn die Abszisse x ist, gleich dem genannten Bruch wird, so erhält man die Quadratur der Figur durch wirkliche Logarithmen, falls die Wurzeln des Nenners reell sind, oder durch hinzutretende imaginäre Logarithmen, falls gewisse Wurzeln imaginär sind. Die wahren Logarithmen fallen aber mit der Quadratur der Hyperbel zusammen, die imaginären Logarithmen ersten Grades fallen mit

der Quadratur des Kreises zusammen. Weil es jedoch imaginäre Logarithmen unendlich vieler höherer Grade gibt, wie wir in der Abhandlung vom vorigen Mai durch Angabe eines Beispiels gezeigt haben[33], so gibt es also auch ebenso viele Grade der Quadraturen, die von der Quadratur des Kreises und der der Hyperbel unabhängig sind, und es ist auf diese Weise eine große Frage erledigt, die bis jetzt in der transzendenten Analysis viel zu schaffen gemacht hat.

Wir wollen annehmen die Wurzeln des Nenners seien

$$x+b,\ x+c,\ x+d,\ x+e,\ x+f \text{ usw.},$$

so viele als in t Einzelheiten sind. Wir werden diese Wurzeln zur Abkürzung mit

$$l,\ m,\ n,\ p,\ q \text{ usw.}$$

bezeichnen. Dann wird offenbar

$$\frac{1}{x^t+\frac{\xi}{\pi}x^{t-1}+\frac{\mu}{\pi}x^{t-2}+\frac{\lambda}{\pi}x^{t-3}+\text{usw.}}$$

dasselbe sein wie

$$\frac{1}{lmnpq\,..}.$$

Ich habe aber eine allgemeine, ziemlich schön fortschreitende Regel gefunden, nach der $1:lmnp$ dasselbe ist wie die folgende Summe

$$\frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)\,l}+\frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)\,m}$$
$$+\frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)\,n}+\frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)\,p};$$

ebenso ist es bei den höheren; denn das allgemeine Gesetz ist für den Aufmerksamen klar. Auf diese Weise läßt sich allgemein ein Bruch mit einem zusammengesetzten Nenner in Brüche mit einfachem Nenner zerlegen.

Wäre nach der zu Anfang vorgenommenen Division im Zähler des Restbruchs die Unbestimmte geblieben, wäre z. B. der Rest die Formel

$$\frac{\vartheta+\varrho x+v x^2+\varphi x^3}{lmnp},$$

so zerlege man ihn in so viele Teile, als Glieder im Zähler sind. Diese Teile werden sein

$$\frac{\vartheta}{lmnp}, \quad \frac{\varrho x}{lmnp}, \quad \frac{v x^2}{lmnp}, \quad \frac{\varphi x^3}{lmnp}.$$

Um hier die Zähler von der Unbestimmten zu befreien, finden wir (nach Fortlassung der Konstanten ϱ, v, φ)

$$\frac{x}{lmnp} = \frac{1}{mnp} - \frac{b}{lmnp},$$

$$\frac{x^2}{lmnp} = \frac{1}{np} - \frac{b+c}{mnp} + \frac{bb}{lmnp},$$

$$\frac{x^3}{lmnp} = \frac{1}{p} - \frac{b+c+d}{np} + \frac{bb+cc+bc}{mnp} - \frac{b^3}{lmnp}.$$

Wir wollen hier noch ein Beispiel beifügen, damit das Gesetz klarer hervortritt:

$$\frac{x^4}{lmnpq} = \frac{1}{q} - \frac{b+c+d+e}{pq} + \frac{\begin{matrix}bb+cc+dd\\ bc+bd+cd\end{matrix}}{npq} - \frac{\begin{matrix}b^3+c^3\\ bbc+bcc\end{matrix}}{mnpq} + \frac{b^4}{lmnpq}.$$

Es können verschiedene Ausdrücke herauskommen, je nachdem man die Reihenfolge der Buchstaben l, m, n, p usw. oder der konstanten Größen b, c, d, e usw. in ihnen ändert. Wenn dann aber die von unbestimmten Zählern befreiten Brüche wie

$$\frac{1}{pq}, \quad \frac{1}{npq}, \quad \frac{1}{mnpq} \quad \text{usw.}$$

oder die andern dieser Art in der bereits angegebenen Weise wieder in Brüche aufgelöst werden, die einen einfachen Nenner haben, so werden jene verschiedenen Wege schließlich auf dasselbe führen, und es können so noch neue sehr schöne Theoreme begründet werden.

Wir kommen auch auf folgende andere Weise zum Ziele: Es liege ein Bruch vor, der eine Potenz von x im Zähler und einen zusammengesetzten Nenner hat wie

$$\frac{x^4}{lmnp}.$$

Wir lösen zuerst diesen Bruch in Brüche mit einfachen Nennern auf in der bereits angegebenen Weise. So kommen wir in diesem Falle auf vier Brüche zurück, nämlich

$$\frac{x^4}{l}, \quad \frac{x^4}{m}, \quad \frac{x^4}{n}, \quad \frac{x^4}{p},$$

falls wir die konstanten Koeffizienten fortlassen. Wenn nun aber im Zähler x oder irgend eine Potenz davon steht, der Nenner aber einfach ist, so läßt sich die Sache auf reine Ganze und auf Brüche mit konstantem Zähler und zugleich einfachem Nenner zurückführen, und zwar in folgender Weise:

$$\frac{x}{l} = 1 - \frac{b}{l},$$

$$\frac{x^2}{l} = x - b + \frac{b^2}{l},$$

$$\frac{x^3}{l} = x^2 - bx + b^2 - \frac{b^3}{l}$$

$$\frac{x^4}{l} = x^3 - bx^2 + b^2 x - b^3 + \frac{b^4}{l}.$$

Jetzt sind die Fälle zu ergänzen, die wir in der vorigen Abhandlung nicht berührt haben, wo nämlich gleiche Wurzeln den übrigen beigemischt sind; denn da passen die gegebenen Regeln nicht. Und es treten auch nicht mehr bloß Logarithmen und Quasilogarithmen auf, sondern es kommen noch die Quadraturen hyperbelartiger Kurven hinein, wie es die Kurven sind, deren Ordinaten

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^3}, \quad \frac{1}{x^4} \quad \text{usw.}$$

lauten. Diese hyperbelartigen Kurven lassen sich bekanntlich in gewöhnlicher Weise quadrieren.

Um aber diese Quadraturen anderer Art aus sich heraus zu entwickeln, setzen wir $h = x + a$, und es liege der Bruch

$$\frac{1}{h^4 lmnp}$$

vor. Dieser kann nach der angegebenen Regel in so viele und solche wie

$$\frac{1}{h^4 l}, \quad \frac{1}{h^4 m}, \quad \frac{1}{h^4 n}, \quad \frac{1}{h^4 p}$$

aufgelöst werden. Ich behaupte, daß sich jeder von diesen wiederum derart zerlegt, daß, wenn man $\omega = l - h$, also ω gleich der Konstanten $b - a$ setzt (es ist nämlich $h = x + a$ und $l = x + b$, also $l - h = b - a$),

$$\frac{1}{h^4 l} = \frac{1}{\omega h^4} - \frac{1}{\omega^2 h^3} + \frac{1}{\omega^3 h^2} - \frac{1}{\omega^4 h} + \frac{1}{\omega^4 l}$$

wird[34]). In derselben Weise erhält man auch $1 : h^4 m$; man braucht nur m für l zu setzen und für die Konstante $l - h = \omega = b - a$ die Konstante $m - h = c - a$. Ebenso ist es bei den andern.

Wie ist es nun, wenn verschiedene gleiche Wurzeln zugleich vorkommen? Es liege z. B. der Bruch

$$\frac{1}{h^4 l^3 mnp}$$

vor. Er ist offenbar das Produkt aus

$$\frac{1}{h^4 l^3} \text{ und } \frac{1}{mnp}.$$

Ich behaupte, daß der erstere in Brüche anfgelöst werden kann, die nur aus einer Art gleicher Wurzeln bestehen. Multiplizieren wir diese Brüche dann einzeln mit $1 : mnp$, so erhalten wir ebensoviele neue Brüche, die dem folgenden ähnlich sind:

$$\frac{1}{h^4 lmnp}.$$

Sie aufzulösen, haben wir bereits gelehrt. Es bleibt also nur noch übrig, daß wir einen Bruch wie $1 : h^4 l^3$ auflösen. Ich behaupte, daß, wenn man $b - a = \omega$ und $a - b = \psi$ setzt,

$$\frac{1}{h^4 l^3} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega^3 h^4} - \dfrac{3}{\omega^4 h^3} + \dfrac{6}{\omega^5 h^2} - \dfrac{10}{\omega^6 h} \\ + \dfrac{1}{\psi^4 l^3} - \dfrac{4}{\psi^5 l^2} + \dfrac{10}{\psi^6 l} \end{cases}$$

wird[35]). Es ist aber der Mühe wert, das allgemeine Theorem herzuschreiben, weil hier das Gesetz nicht so leicht wie in den früheren Fällen aus dem Anblick der Beispiele sich bilden läßt. Nimmt man an, daß t und v konstante ganze rationale Zahlen sind, so behaupte ich, daß

$$\frac{1}{h^t l^v} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega^v h^t} - \dfrac{\frac{v}{1}}{\omega^{v+1} h^{t-1}} + \dfrac{\frac{v(v+1)}{1.2}}{\omega^{v+2} h^{t-2}} + \text{usw. bis zu } \dfrac{\frac{\cdots\cdot}{\cdots\cdot}}{\ldots h^1} \\ + \dfrac{1}{\psi^t l^v} - \dfrac{\frac{t}{1}}{\psi^{t+1} l^{v-1}} + \dfrac{\frac{t(t+1)}{1.2}}{\psi^{t+2} l^{v-2}} + \text{usw. bis zu } \dfrac{\frac{\cdots\cdot}{\cdots\cdot}}{\ldots l^1} \end{cases}$$

wird. Wenn hier z. B. v gleich 1 wäre, als $l^v = l$, so hätte

man nur das Glied $\frac{1}{\psi^l l^v}$ zu behalten und die folgenden, in denen l sonst vorkäme, fortzulassen. Wenn nun drei oder mehr Arten gleicher Wurzeln zusammen da wären, so ist trotzdem aus der bereits angegebenen Methode klar, daß sie sich alle auf Brüche mit nur einem unbestimmten Buchstaben, die hier die einfachsten sind, zurückführen lassen. Liegt nämlich $1 : h^5 l^4 m^3$ vor, so ist klar, daß er das Produkt aus

$$\frac{1}{h^5 l^4} \text{ und } \frac{1}{m^3}$$

ist. Nun löse man $1 : h^5 l^4$ in der vorgeschriebenen Weise in einfache Brüche auf. Jeder von ihnen werde mit $1 : m^3$ multipliziert. Dadurch erhält man ebensoviele Brüche, die nur noch zwei Arten von Wurzeln haben werden. Daß diese sich aber in einfache Brüche auflösen, ist bereits gezeigt worden. Es werden also zwei Arten auf eine, drei auf zwei, vier auf drei und so fort zurückgeführt, was wir hier nicht weiter zu verfolgen brauchen. Hiernach ist klar, daß sich alles bewältigen läßt, obwohl es zweckmäßig wäre, auch dies in Vorschriften und Lehrsätze zu fassen.

Schließlich hat Herr *Johann Bernoulli*, ein Mathematiker, so geistreich wie nur einer, gezeigt, daß auch er schon seit einiger Zeit eine gewisse Analysis dieser Art benutzt, und daher ein Problem zur Aufnahme in diese Acta übersandt. Dieses wird hinter den folgenden Worten stehen. Dabei bin ich aber gezwungen, anderer Meinung zu sein, als er, weil er glaubt, daß sich hier alles auf die Quadratur des Kreises und der Hyperbel zurückführen läßt (abgesehen von gewöhnlichen Quadraturen)[36]. Es ist nämlich von mir in dem obengenannten, in die Acta vom Mai eingerückten Beispiel bewiesen worden, daß es eine unbegrenzte Reihe von Arten transzendenter rationaler Quadraturen gibt, eine immer höher als die andere, unabhängig voneinander, und daß die Quadratur der Hyperbel und die des Kreises nur die ersten und einfachsten von jenen allen sind.



VIII. Ein merkwürdiger Symbolismus des algebraischen und des Infinitesimalkalküls bei der Vergleichung der Potenzen und der Differenzen und über das transzendentale Homogeneitätsgesetz.

(Miscellanea Berolinensia.)

Wie es leicht ist, von jeder beliebigen Größe eine Potenz zu finden, so können wir von jeder nach bestimmtem Gesetz variierenden Größe die Differenz oder das Element finden. Aber der Rückgang von der Potenz zur Wurzel durch die Ausziehung und der Rückgang von der Differenz zu dem Gliede durch die Summation steht nicht immer in unserer Macht. Und wie die Unmöglichkeit einer in rationalen Zahlen verlangten Wurzelausziehung die Irrationalzahlen hervorbringt, so bringt die Unmöglichkeit einer in algebraischen Größen verlangten Summation die transzendenten Größen hervor, deren Betrachtung wir schon längst in die Analysis eingeführt haben. Oft werden freilich rationale Größen nach Art einer Wurzel, d. h. irrational dargestellt, obwohl sie auf eine rationale Formel zurückgeführt werden können. Ebenso werden oft algebraische oder gewöhnliche Größen nach Art transzendenter dargestellt, obwohl es möglich ist, sie auf eine gewöhnliche Formel zurückzuführen. Es ist daher ein großer Unterschied zwischen G r ö ß e n und F o r m e l n.

Es gibt aber eine geheimnisvollere Analogie zwischen Potenzen und Differenzen, die hier auseinanderzusetzen der Mühe wert sein wird. Zunächst werden wir die Potenzen eines Binoms (d. h. einer Summe zweier Nomina) mit den Differenzen eines Rechtecks (d. h. eines Produktes zweier Faktoren) vergleichen, und dann werden wir (da die Analogie fortlaufend ist) kurz das gemeinsame Gesetz sowohl einer Potenz eines beliebigen Multinoms als auch einer Differenz eines Produktes

aus beliebig vielen Faktoren geben. Die Potenzen aber haben ebenso wie die Differenzen ihre Exponenten, die den Grad der Potenz oder Differenz anzeigen. Wir werden daher der deutlicheren Analogie wegen, wie dx, d^2x, d^3x, die erste, zweite, dritte Differenz bezeichnet, an dieser Stelle x, x^2, x^3 durch px, p^2x, p^3x ausdrücken, d. h. erste, zweite, dritte Potenz von x. Und $p^e(x+y)$ wird die Potenz von $x+y$ zum Exponenten e bezeichnen, wie $d^e(xy)$ die Differenz von xy ebenfalls mit dem Exponenten e.

Es liege nun ein Binom $x+y$ vor. Seine erste Potenz, wenn man so sagen darf, oder, wenn man lieber will, der Grad, d. h. die, die den Exponenten 1 hat, ist die Größe oder Wurzel selbst, d. h. eben das Binom $x+y$, also

$$p^1(x+y) = x+y\,.$$

Dagegen wird die zweite Potenz oder das Quadrat von $x+y$

$$p^2(x+y) = 1x^2 + 2xy + 1y^2,$$

und der Kubus oder die dritte Potenz von $x+y$ ist

$$p^3(x+y) = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

und das Biquadrat oder die vierte Potenz

$$p^4(x+y) = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^3.$$

Allgemein wird man finden, daß eine beliebige Potenz von $x+y$, d. h. $p^e(x+y)$

$$1x^e + \frac{e}{1}x^{e-1}y + \frac{e(e-1)}{1\,.\,2}x^{e-2}y^2 + \frac{e(e-1)(e-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{e-3}y^3 + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^{e-4}y^4 \text{ usw.}$$

ist. Hier verschwindet wegen der Subtraktion nach Einheiten wachsender Zahlen, wenn z. B. $e = 3$, d. h. $e - 3 = 0$ ist, das Glied, in welchem $e - 3$ vorkommt, und alle darauf folgenden. Es wird also, wenn $e = 3$ ist,

$$p^3(x+y) = 1x^3 + \frac{3}{1}x^2y + \frac{3(3-1)}{1\,.\,2}xy^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{1\,.\,2\,.\,3}y^3$$

oder gleich

$$1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$
$$= 1p^3xp^0y + 3p^2xp^1y + 3p^1xp^2y + 1p^0xp^3y\,.$$

Dabei ist zu bemerken, daß x^0, y^0 oder p^0x, p^0y oder eine

Potenz irgend einer andern Größe, deren Exponent verschwindet oder 0 wird, in die Einheit übergeht. Setzen wir nämlich der Reihe nach

die Größen einer geometrischen Progression	$\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{1}, x, x^2, x^3,$
so werden die entsprechenden Exponenten eine arithmetische Progression bilden	$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.$

Es ist also $p^0 x = 1$ und $p^{-1}x = \frac{1}{x}$ oder gleich $1:x$ und $p^{-2}x = \frac{1}{x^2}$ oder gleich $1:x^2$. Die allgemeine Formel für die Potenz eines Binoms läßt sich daher in folgender Weise schreiben:

$$p^e(x+y) = 1p^e x p^0 y + \frac{e}{1} p^{e-1} x p^1 y + \frac{e(e-1)}{1.2} p^{e-2} x p^2 y$$
$$+ \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3} p^{e-3} x p^3 y + \frac{e(e-1)e-2)e-3)}{1.2.3.4} p^{e-4} x p^4 y + \text{usw.}$$

Wir wollen jetzt zu den Differentiationen übergehen und zeigen, daß dort dasselbe herauskommt, nur daß man für $x+y$ zu setzen hat xy und für p zu setzen hat d. Zunächst ist nämlich

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy,$$

wie wir ehemals gelehrt haben, als wir zum ersten Male vor vielen Jahren die Differentialrechnung veröffentlichten. Aus dieser einen Grundformel heraus läßt sich die ganze übrige Berechnung der Differenzen beweisen. Die Grundformel selbst aber wird so gezeigt: $d(xy)$ ist die Differenz zwischen $(x+dx)(y+dy)$ und xy, d. h. zwischen dem nächsten Rechteck und dem vorgelegten. Es ist aber

$$(x+dx)(y+dy) = xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy.$$

Nimmt man hier xy fort, so entsteht $y\,dx + x\,dy + dx\,dy$. Weil aber dx oder dy unvergleichlich kleiner als x oder y ist, so wird auch $dx\,dy$ unvergleichlich kleiner als $x\,dy$ und $y\,dx$ sein und daher fortgelassen. Es wird also schließlich

$$(x+dx)(y+dy) - xy = y\,dx + x\,dy.$$

Nun ist $x = d^0 x$ und $y = d^0 y$, weil da nämlich keine

Differenz vorliegt, und $d^1x = dx$, $d^1y = dy$. Man kann daher schreiben

$$d^1(xy) = d^1xd^0y + d^0xd^1y.$$

Was übrigens die Verschiedenheiten in den Zeichen anbetrifft, wenn y bei wachsendem x abnimmt, oder wenn eine von den Differenzen, wie dx oder dy, eine negative Größe wird, so setze ich das jetzt nicht auseinander, da ich den Gegenstand allgemein behandle und mir das Recht vorbehalte, die Zeichen einer jeden in speziellen Fällen, wo es nötig ist, zu ändern.

Gehen wir weiter zu den zweiten Differenzen:

$$dd(xy) = d(ydx + xdy) = d(ydx) + d(xdy).$$

Nach der vorigen Rechnung ist

$$d(ydx) = yddx + dxdy;$$

schreiben wir nämlich z für dx, so wird $ddx = dz$ und

$$d(ydx) = d(yz) = ydz + zdy \text{ (nach der vorigen Rechnung)}$$
$$= yddx + dxdy.$$

Mit gleichem Rechte wird

$$d(xdy) = dxdy + xddy.$$

Durch Zusammenfassung entsteht daher

$$dd(xy) = yddx + 2dxdy + xddy,$$

genau so wie $x + y$ zum Quadrat $xx + 2xy + yy$ gibt, oder es ist

$$d^2(xy) = d^2xd^0y + 2d^1xd^1y + d^0xd^2y$$

genau so wie

$$p^2(x + y) = p^2xp^0y + 2p^1xp^1y + p^0xp^2y.$$

Diese Analogie zwischen Differentiation und Potenzierung bleibt fortlaufend erhalten, wenn man mit der Potenzierung (oder der Erhöhung der Potenz) und der Differentiation fortfährt. Wie nämlich bei einer neuen Potenzierung des Binoms das ganze Vorhergehende sowohl mit y als auch mit x multipliziert und im ersten Falle das p des y, im zweiten das p des x um eine Einheit vermehrt wird, so wird bei der Differentiation das ganze Vorhergehende sowohl nach y als auch nach x differenziert und im ersten Falle das d des y, im zweiten aber das d des x um eine Einheit vermehrt.

Es entsteht z. B. durch Multiplikation von

$$\left.\begin{matrix} p^1 x p^0 y \\ p^0 x p^1 y \end{matrix}\right\} \text{ mit } y \left\{\begin{matrix} p^1 x p^1 y \\ p^0 x p^2 y \end{matrix}\right\}, \text{ mit } x \left\{\begin{matrix} p^2 x p^0 y \\ p^1 x p^1 y \end{matrix}\right. ,$$

ebenso durch Differentiation von

$$\left.\begin{matrix} d^1 x d^0 y \\ d^0 x d^1 y \end{matrix}\right\} \text{ nach } y \left\{\begin{matrix} d^1 x d^1 y \\ d^0 x d^2 y \end{matrix}\right\}, \text{ nach } x \left\{\begin{matrix} d^2 x d^0 y \\ d^1 x d^1 y \end{matrix}\right. .$$

Hieraus folgt weiter

$$d^3(xy) = 1 d^3 x d^0 y + 3 d^2 x d^1 y + 3 d^1 x d^2 y + 1 d^0 x d^3 y$$

oder in der gewöhnlichen Schreibweise gleich

$$y d^3 x + 3 d^2 x d y + 3 d x d^2 y + x d^3 y ,$$

und allgemein, wenn wir, wie kurz vorher beim Potenzieren den Buchstaben p, so jetzt beim Differenzieren den Buchstaben d anwenden,

$$d^e(xy) = 1 d^e x d^0 y + \frac{e}{1} d^{e-1} x d^1 y + \frac{e(e-1)}{1 \,.\, 2} d^{e-2} x d^2 y$$
$$+ \frac{e(e-1)(e-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} d^{e-3} x d^3 y + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} d^{e-4} x d^4 y + \text{usw.}$$

Ja sogar auch zwischen den Potenzen der Multinome und den Differenzen einer Kombination oder eines Produktes aus mehreren Faktoren besteht dieselbe Analogie, z. B. zwischen der Differenz einer Terne $d^e(xyz)$ und der Potenz eines Trinoms $d^e(x + y + z)$. Denn es bleibt immer wahr, daß sowohl der Exponent von p als auch der von d in der Formel, die man zu einer höheren Potenz erheben oder weiter differenzieren will, nach jedem Buchstaben für sich um eine Einheit vermehrt und aus allen Ergebnissen die neue Formel gesammelt wird. Es ist nun seinerzeit von mir die allgemeine Koeffizientenregel gefunden worden, nach der sich die Potenz eines beliebigen Polynoms ausdrückt. Dieselbe Regel wird folglich für die Zahlenkoeffizienten der Formel gelten, die die Differentiation eines Produktes aus mehreren Faktoren ausdrückt.

Es ist aber ein Zahlenkoeffizient bei den Potenzen nichts anderes als die Anzahl der Umstellungen, die die Buchstaben der Form oder des Gliedes gestatten, vor welchem der Koeffizient steht. Z. B. ergibt sich für $p^3(x + y + z)$ oder für den Kubus von $x + y + z$

$$\begin{array}{lll} 1x^3 + & 3x^2y + & 6xyz. \\ 1y^3 & 3xy^2 & \\ 1z^3 & 3x^2z & \\ & 3xz^2 & \\ & 3y^2z & \\ & 3yz^2 & \end{array}$$

Der Koeffizient aller Glieder wie x^2y ist hier 3, weil man für xxy schreiben kann

$$xxy,\ xyx,\ yxx,$$

und der Koeffizient aller Glieder wie xyz ist 6, weil man für xyz schreiben kann

$$xyz,\ xzy,\ yxz,\ yzx,\ zxy,\ zyx.$$

Der Koeffizient aller Glieder wie x^3 ist dagegen 1, weil in xxx eine Umstellung nichts ändert. Die Art aber, wie man die Anzahl der Umstellungen bei einer vorgelegten Form findet, habe ich anderswo in hinreichend bequemer Weise angegeben.

Um aber die Analogie mit den Differenzen zu wahren, wird der Kubus oder die dritte Potenz von $x + y + z$ so geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{lll} 1p^3xp^0yp^0z + & 3p^2xp^1yp^0z + & 6p^1xp^1yp^1z \\ 1p^0xp^3yp^0z & 3p^1xp^2yp^0z & \\ 1p^0xp^0yp^3z & 3p^2xp^0yp^1z & \\ & 3p^1xp^0yp^2z & \\ & 3p^0xp^2yp^1z & \\ & 3p^0xp^1yp^2z & \end{array}\right\} \text{ist gleich}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} p^3(x+y+z) = & 1x^3 + & 3x^2y + & 6xyz. \\ & 1y^3 & 3xy^2 & \\ & 1z^3 & 3x^2z & \\ & & 3xz^2 & \\ & & 3y^2z & \\ & & 3yz^2 & \end{array}\right.$$

Ähnlich wird sich also die dritte Differenz von xyz in folgender Form ergeben:

$$\left.\begin{array}{lll} 1d^3xd^0yd^0z + & 3d^2xd^1yd^0z + & 6d^1xd^1yd^1z \\ 1d^0xd^3yd^0z & 3d^1xd^2yd^0z & \\ 1d^0xd^0yd^3z & 3d^2xd^0yd^1z & \\ & 3d^1xd^0yd^2z & \\ & 3d^0xd^2yd^1z & \\ & 3d^0xd^1yd^2z & \end{array}\right\} \text{ist gleich}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} d^3(x+y+z) = & 1d^3x\,.\,yz + & 3d^2xdy\,.\,z + & 6dxdydz\,. \\ & 1xd^3y\,.\,z & 3dxd^2y\,.\,z & \\ & 1xyd^3z & 3d^2x\,.\,ydz & \\ & & 3dx\,.\,yd^2z & \\ & & 3xd^2ydz & \\ & & 3xdyd^2z & \end{array}\right.$$

Hier zeigt sich deutlich, daß bei der neuen Schreibweise die Analogie zwischen den Potenzen und Differenzen zum Vorschein kommt, bei der gewöhnlichen (an zweiter Stelle aufgeführten) aber nicht. Und diese Analogie reicht so weit, daß bei solcher Schreibweise auch (worüber man sich wundern wird) $p^0(x+y+z)$ und $d^0(xyz)$ sich entsprechen. In der Tat ist

$$p^0(x+y+z) = 1 = p^0xp^0yp^0z\,,$$
$$d^0(xyz) \quad = xyz = d^0xd^0yd^0z\,.$$

Durch dasselbe Verfahren wird auch klar, welches das **transzendentale Homogeneitätsgesetz** ist, während man dieses bei der gewöhnlichen Art, Differenzen zu schreiben, nicht so erkennt. Z. B. ist bei Anwendung dieser neuen **Bezeichnungsweise** klar, daß $addx$ und $dxdx$ nicht nur algebraisch (weil beidemal je zwei Größen miteinander multipliziert werden), sondern auch transzendental homogen und miteinander vergleichbar sind, da man jenes d^0ad^2x, dieses d^1xd^1x schreiben kann und beidemal die Differentialexponenten dieselbe Summe bilden, nämlich $0+2=1+1$. Übrigens setzt das transzendentale Homogeneitätsgesetz das gewöhnliche oder algebraische voraus. Inzwischen sind nicht alle transzendenten Formen, mögen sie auch miteinander homogen sein, in gleicher Weise für die Summation geeignet. Z. B. ist $adxddx$ absolut summierbar, während $dxdxdx$ oder $p^3(d^1x)$ zwar damit sowohl algebraisch als auch transzendental homogen, aber nicht summierbar ist, wenn nicht eine besondere Voraussetzung hinzukommt.



Anmerkungen.

Das vorliegende Bändchen bringt einige der zahlreichen Abhandlungen, die *Leibniz* über die Analysis des Unendlichen veröffentlicht hat. Ein demnächst erscheinendes soll sich mit *Newton* beschäftigen, so daß dann die wichtigsten Arbeiten der beiden großen Erfinder der Infinitesimalrechnung in deutscher Sprache vorliegen werden.

Gottfried Wilhelm Leibniz, der berühmte Mathematiker, Philosoph und Staatsmann, wurde am 1. Juli 1646 in Leipzig geboren, wo sein Vater Notar und Professor der Moralphilosophie war. 1661 kam er auf die Universität und studierte Rechtswissenschaft, interessierte sich aber auch für Logik und im Anschluß daran für Mathematik. Die mathematischen Studien standen damals an den deutschen Universitäten auf einer sehr tiefen Stufe. *Leibniz* lernte als Student, auch in Jena, wohin er zeitweilig übersiedelte, nur die Elementarmathematik kennen. Von großer Bedeutung war es für ihn, daß er nach Vollendung seiner Studien 1667 in Nürnberg mit dem Baron *von Boineburg* bekannt wurde. Dieser mächtige Gönner, selbst ein ehemaliger Staatsmann, ermöglichte ihm den Eintritt in die diplomatische Laufbahn. Im März 1672 kam *Leibniz* mit einer Gesandtschaft des Kurfürsten von Mainz nach Paris. Am Hofe Ludwigs des XIV. lernte er eine Reihe hervorragender Gelehrter kennen, unter ihnen den berühmten holländischen Mathematiker und Physiker *Huygens*, der seit 1666 als Mitglied der Akademie in Paris lebte und zu jener Zeit sein großes Werk über die Pendeluhr (Horologium oscillatorium) zum Druck brachte. Beim Lesen dieses Buches erkannte *Leibniz*, wie gering seine mathematischen Kenntnisse waren, und wieviel ihm zum Verständnis der *Huygensschen* Arbeit fehlte. Er begann mit großen Eifer die »Géometrie« *Descartes'*, die »Synopsis geometrica« von *Honoratus Fabri*, *Pascals* Briefe über die Zykloide und andere mathematische Schriften zu studieren. Ein kurzer Aufenthalt in London (1673)

brachte ihm neue Anregungen. Er lernte dort die »Logarithmotechnia« von *Nikolaus Mercator*, ebenso die wichtigen »Lectiones geometricae« von *Isaac Barrow*, dem Lehrer *Newtons*, kennen. Dagegen wissen wir genau, daß er damals noch nichts von den Forschungen *Newtons* hörte. Nach Paris zurückgekehrt, setzte er unter *Huygens'* Leitung seine Studien fort und kam sehr bald zu eigenen Entdeckungen. Im August 1673 versuchte er, eine allgemeine Tangentenmethode zu entwickeln und das von *Pascal* übernommene charakteristische Dreieck (triangulum characteristicum), das aus einem unendlich kleinen Bogenstück und den zugehörigen Abszissen- und Ordinatendifferenzen besteht, bei allen Tangentenkonstruktionen anzuwenden. Schon damals spricht er auch von dem sogenannten »umgekehrten Tangentenproblem«. »Regressus«, so heißt es in einem Manuskript, »an haberi possit a tangentibus aut aliis functionibus ad ordinatas, quaestio est magna. Res est accuratissime investiganda. . . . Est quaedam ipsius Analyseos Analysis, sed in qua profecto consistit Apex scientiae humanae in hoc quidem genere rerum«. (Ob es von den Tangenten oder andern Funktionen einen Rückgang zu den Ordinaten gibt, ist eine Frage von großer Bedeutung. Die Sache muß genau untersucht werden. . . . Es ist gewissermaßen die Analysis der Analysis, worin aber in Wahrheit der Gipfel der menschlichen Wissenschaft, wenigstens bei dieser Art von Dingen, liegt.) In einem Manuskript vom 29. Oktober 1675 wendet *Leibniz* bereits das Integralzeichen an. Er schreibt aber zunächst nicht wie wir $\int f(x)dx$, sondern $\int f(x)$. Auch das Differentiationszeichen d gebraucht er in anderer Weise als wir. Er schreibt $\frac{x}{d}$ statt dx. Am 11. November 1675 verfaßte *Leibniz* einen Aufsatz mit dem Titel: »Methodi tangentium inversae exempla« (Beispiele zur umgekehrten Tangentenmethode), und hier kommt neben $\int f(x)$ zum ersten Male die Schreibung $\int f(x)dx$ vor, ebenso statt $\frac{x}{d}$ die Schreibung dx. Schon damals hatte also *Leibniz* die zweckmäßige Symbolik gefunden, die jetzt über die ganze Welt verbreitet ist. »Une partie du secret de l'analyse consiste dans la charactéristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert«, sagt er später in einem Briefe an den Marquis *de l'Hospital*, und schon 1678 findet sich in einem Brief an *Tschirnhaus* folgende schöne Bemerkung: »In siguis spectanda

est commoditas ad inveniendum quae maxima est, quoties rei naturam intimam paucis exprimunt et velut pingunt, ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor. Talia vero sunt signa a me in calculo aequationum tetragonisticarum adhibita, quibus problemata saepe difficillima paucis lineis solvo«. (Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie die innerste Natur der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert. Von solcher Beschaffenheit sind aber die Bezeichnungen, die ich in dem Kalkül der tetragonistischen Gleichungen angewandt habe, und durch die ich oft die schwierigsten Probleme auf wenigen Zeilen löse.)

Früher als *Leibniz* war *Isaac Newton* (ohne etwas darüber zu veröffentlichen) zu seiner Fluxionsrechnung gelangt, die im wesentlichen dasselbe wie die Differentialrechnung leistet. Man ist aber besonders nach den sorgfältigen Untersuchungen von *Gerhardt* (Die Entdeckung der Differentialrechnung durch *Leibniz*, Halle 1848. Die Entdeckung der höheren Analysis, Halle 1855) zu der Überzeugung gelangt, daß *Leibniz* unabhängig von *Newton* seine neuen Ideen fand. Allerdings kam im September 1675 der Freiherr *Walther von Tschirnhaus* aus London nach Paris. Er hatte *Newton* und dessen Freunde kennen gelernt und konnte ohne Zweifel über die *Newtonschen* Resultate viel berichten. Aus einem Briefe *Leibnizens* vom 28. Dezember 1675 scheint aber hervorzugehen, daß *Tschirnhaus* hauptsächlich von seinen eigenen Entdeckungen sprach. Mit Bezug auf *Tschirnhaus* heißt es dort nämlich: »multum ... ejus consuetudine delector et ingenium agnosco in Juvene praeclarum magna promittens, inventa mihi ostendit non pauca, Analytica et Geometrica, sane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo expectari possit«. (Ich habe großen Gefallen an dem Verkehr mit ihm und bemerke bei dem jungen Manne eine hervorragende Begabung, die viel verspricht. Er zeigte mir nicht wenige Erfindungen, analytische und geometrische, die wirklich sehr elegant sind. Danach urteile ich leicht, was von ihm erwartet werden kann.) Als *Leibniz* 1676 Paris verließ und nach Deutschland zurückkehrte, hielt er sich noch einige Tage in London auf. Hier verkehrte er mit *Collins*, bei dem *Newtonsche* Manuskripte deponiert waren. Er hat auch, wie wir wissen, *Newtons* »De analysi per aequationes numero terminorum infinitas« sich angesehen und sogar exzerpiert.

In dieser Arbeit ist aber über die Fluxionsmethode nur ganz wenig enthalten, und es fehlt jede Symbolik. Auch die beiden vielbesprochenen Briefe *Newtons* an *Leibniz* aus dem Jahre 1676 hätten diesen nie und nimmer auf seine Erfindungen bringen können, da die Hauptsachen nach einer damals verbreiteten Sitte in geheimnisvollen Anagrammen versteckt waren. *Leibniz* hätte auch nicht sofort sachkundig auf die *Newtonschen* Briefe antworten können, wenn er nicht schon in dem ganzen Gedankenkreis völlig zu Hause gewesen wäre. Am wichtigsten ist das Zeugnis *Newtons* in seinen berühmten »Philosophiae naturalis principia mathematica« 1686—87, wo er in einem Scholion direkt die Unabhängigkeit *Leibnizens* anerkennt.

Leibniz trat 1676 in den hannöverschen Staatsdienst. Hier war er durch seine amtlichen Pflichten an der weiteren Ausbildung seiner mathematischen Ideen stark gehindert. Daher kam es, daß er erst 1684 eine Publikation über seine Differentialrechnung machte. Er plante ein großes Werk über die »scientia infiniti«, zu dessen Ausführung er aber nicht gekommen ist. Die letzten 16 Jahre seines Lebens wurden ihm durch einen unerquicklichen Prioritätsstreit mit *Newton* verbittert. Durch eine von der Royal Society eingesetzte Kommission wurde die Unabhängigkeit seiner Erfindung ausdrücklich verneint, er wurde zum Nacherfinder, ja sogar zum Plagiator herabgewürdigt. Auch bei seinem Fürsten fiel er in Ungnade, trotzdem er ihm zur englischen Königskrone verholfen hatte. Er starb am 14. November 1716.

---

1) *Zu S. 3.* Wir sagen jetzt statt »Differenz (differentia)« Differential. Die *Leibnizsche* Definition stimmt mit der heutzutage üblichen überein, nur daß *Leibniz* die Vorzeichen der Strecken XB, XC, XD, XE, unberücksichtigt läßt. Dieser Mangel ist leicht zu beseitigen: Ist y die Ordinate und $s = DX$ die Subtangente, mit dem richtigen Zeichen genommen, so wird $dy = \frac{y}{s} dx$; DX ist positiv (negativ), wenn man sich beim Übergange von D nach X in der Richtung der wachsenden (abnehmenden) x bewegt. Aus dieser Definition von dy folgt, wenn man $y = f(x)$ setzt und an die Entstehung der Tangente aus der Sekante denkt,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

2) *Zu S. 4.* Auch bei der Formel für $d(xv)$ hätte *Leibniz* doppelte Vorzeichen schreiben müssen, wie er dies in andern Schriften wirklich getan hat. Die Unbestimmtheit der Vorzeichen kommt daher, daß er, wie schon in Anm. 1 erwähnt wurde, die Subtangente ohne Vorzeichen nimmt.

3) *Zu S. 5.* Hier irrt sich *Leibniz.* Setzt man z. B. $y = x^2$, so ist $dy = 2x dx$ und $d^2y = 2dx^2$. Die dy sind in der Umgebung von $x = 0$ zunehmend, die y nehmen aber für $x \leqq 0$ ab, für $x \geqq 0$ zu.

4) *Zu S. 11.* a_ν, 0 seien die Koordinaten des Punktes ν $(\nu = 4, 5, \ldots)$ und

$$r_\nu = \sqrt{(x - a_\nu)^2 + y^2}$$

die Entfernung der Punkte 3 und ν. Die Gleichung der Kurve ist dann

$$r_4 + r_5 + \cdots = g.$$

Da

$$r_\nu dr_\nu = (x - a_\nu)dx + y dy$$

ist, so hat man

$$\left(\frac{x - a_4}{r_4} + \frac{x - a_5}{r_5} + \cdots\right) dx + \left(\frac{y}{r_4} + \frac{y}{r_5} + \cdots\right) dy = 0.$$

Es verhält sich also dx zu dy, d. h. $T2$ zu 23, wie

$$\frac{y}{r_4} + \frac{y}{r_5} + \cdots \text{ zu } \frac{a_4 - x}{r_4} + \frac{a_5 - x}{r_5} + \cdots$$

oder

$$\frac{23}{r_4} + \frac{23}{r_5} + \cdots \text{ zu } \frac{24}{r_4} + \frac{25}{r_5} + \cdots$$

Leibniz schreibt statt 24 und 25, da diese Strecken in der Figur negativ sind, — 24 und — 25. Bei ihm sind 24, 25, ... nicht wie bei uns die Maßzahlen von Strecken (inklusive Vorzeichen), sondern Entfernungen.

5) *Zu S. 11. Florimond de Beaune* (1601—1652) war einer der ersten Anhänger der Mathematik *Descartes'*. Die in Rede stehende Aufgabe gehörte zu denen, die er 1639 den Mathematikern vorlegte. Wir würden die *Leibniz*sche Betrachtung so zu Ende führen. Aus $w = \frac{a}{b} dw$ oder $w dx = a dw$ folgt

$$\log w = \frac{x}{a} + \log c \quad \text{oder} \quad w = c e^{\frac{x}{a}}.$$

Das ist die logarithmische Kurve.

6) *Zu S. 12. Joachim Jung* wurde 1587 zu Lübeck geboren, wurde 1609 Professor der Mathematik in Gießen. 1614 verließ er seinen Lehrstuhl und begann noch einmal zu studieren, war an verschiedenen Orten Lehrer und starb 1657 als Rektor des Johanneums in Hamburg.

7) *Zu S. 12.* Die Brüder *Bernoulli* stammen aus einer Familie, die während der Protestantenverfolgung *Albas* aus den Niederlanden nach Basel zog. Ihr Vater war hier Ratsherr. Sie widmeten sich beide trotz verschiedener Hindernisse dem Studium der Mathematik und waren zusammen mit dem *Marquis de l'Hospital* die ersten eifrigen Anhänger und Förderer der *Leibniz*schen Lehre. *Jacob B.* (1654—1705) war der Lehrer *Johann Bernoullis* (1667—1748). Zu den Schülern *Johanns* gehörte der berühmte *Leonhard Euler.*

8) *Zu S. 15.* Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die zu zerlegende Strecke, und dessen Höhe gleich OA ist.

9) *Zu S. 15.* Das rechtwinklige Dreieck OAR liefert

$$OA^2 = OR^2 - AR^2 = (OR + AR)(OR - AR).$$

OA ist also die mittlere Proportionale zwischen $OR + AR$ und $OR - AR$, deren Summe gleich $2\,OR = 2\,NC$ ist. $2\,NC$ ist damit, wie verlangt wird, in zwei Teile zerlegt, zwischen denen OA die mittlere Proportionale ist.

10) *Zu S. 15.* Man hat in der Tat

$$\begin{aligned} 4AR^2 &= 4OR^2 - 4OA^2 = 4OB^2 - 4OA^2 \\ &= (O\omega + O\psi)^2 - 4\,O\omega \,.\, O\psi = (O\psi - O\omega)^2 = \psi\omega^2. \end{aligned}$$

11) *Zu S. 18.* Alle Sätze der *Leibniz*schen Arbeit beweisen sich leicht, sobald man die Gleichung der Kettenlinie hat. Diese ergibt sich folgendermaßen. $\mathfrak{T}$ sei die Spannung der Kette im Punkte C, dessen Koordinaten $ON = x$, $NC = y$ sind; α und β seien die Richtungscosinus von TC in bezug auf die Achsen ON und OA. Ist $\overline{C}$ ein unendlich benachbarter Kettenpunkt mit den Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, so herrscht in $\overline{C}$ die Spannung $\mathfrak{T} + d\mathfrak{T}$. Man denke sich nun das Kettenstückchen $C\overline{C}$ starr gemacht, wodurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben wird. Auf dieses starre Kettenstückchen, dessen Länge ds, und dessen Gewicht γds heiße (γ konstant), wirken folgende Kräfte:

1. in C eine Kraft mit den Komponenten $-\mathfrak{T}\alpha, \ -\mathfrak{T}\beta$,
2. » $\overline{C}$ » » » » » $\mathfrak{T}\alpha + d(\mathfrak{T}\alpha), \ \mathfrak{T}\beta + d(\mathfrak{T}\beta)$,
3. im Schwerpunkt » » » $0, \ -\gamma ds$.

Das Gleichgewicht fordert, daß die Summen der gleichnamigen Komponenten gleich Null sind, daß also

$$d(\mathfrak{T}\alpha) = 0, \quad d(\mathfrak{T}\beta) - \gamma ds = 0$$

ist. Aus der ersten Gleichung folgt, daß $\mathfrak{T}\alpha$ längs der Kette konstant, etwa gleich c ist. Beachtet man, daß $\beta : \alpha = dy : dx = y'$ und $\mathfrak{T}\beta = cy'$ ist, so liefert die zweite Gleichung

$$cdy' - \gamma ds = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a} \cdot \quad \left(a = \frac{c}{\gamma}\right).$$

Durch Integration findet man

$$\log\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = \frac{x}{a},$$

wenn man noch beachtet, daß im tiefsten Punkt der Kette $y' = 0$ und $x = 0$ ist. Zugleich hat man

$$\log\left(-y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = -\frac{x}{a} \cdot$$

Es ist daher

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x}{a}}, \quad -y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{-\frac{x}{a}}$$

und

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Durch Integration ergibt sich endlich

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß $OA = a$ ist. Jetzt sieht man auch, welches Verhältnis die beiden Strecken D und K haben. Die Gleichung der logarithmischen Kurve $\xi\xi$ ist nämlich $y = ae^{\frac{x}{a}}$, so daß für $x = a$ herauskommt $y = ae$. K verhält sich also zu D wie e zu 1.

12) *Zu S. 19. Nikolaus Mercator* ist berühmt durch seine Logarithmotechnia (1669), die auch *Leibniz* kannte. M. hat z. B. die Reihenentwicklung für $1 : (1 + x)$ angegeben und daraus die für $\log(1 + x)$ abgeleitet.

13) *Zu S. 19.* *Newton* hat eine allgemeine Methode angegeben, um die Wurzeln y einer Gleichung $f(x, y) = 0$ (f rational und ganz) in Reihen zu entwickeln.

14) *Zu S. 20.* Der Sinus rectus ist gleich dem Radius, multipliziert mit dem Sinus im heutigen Sinne.

15) *Zu S. 20.* Der Sinus totus ist gleich dem Radius.

16) *Zu S. 21.* Wir sehen hier, daß *Leibniz* die Differentiale von sin und arc sin kennt, die in seiner Arbeit von 1684 nicht ausdrücklich vorkommen.

17) *Zu S. 28.* Da $A_1L = a \sin\varphi$, $LH = a \cot\varphi$ ist ($\varphi = \measuredangle GA_1F$ in Fig. 5), so wird die Kurve B_1HH (der geometrische Ort der Punkte H) in bezug auf die Achsen A_1L und A_1R dargestellt durch die Gleichungen

$$x = a \sin\varphi, \quad y = a \cot\varphi.$$

18) *Zu S. 28.* Da $\measuredangle EAB = \measuredangle GA_1F = \varphi$ ist, so haben wir

$$dA_1E : dA_1L = -\cot\varphi, \text{ also } dA_1E = -\frac{1}{a} a \cot\varphi \, dA_1L,$$

d. h. (weil $LH = B_1K = a \cot\varphi$ ist)

$$a dA_1E = - LH dA_1L.$$

Daraus folgt, daß aA_1E gleich dem dreieckigen Gebiet LB_1H_3H ist.

19) *Zu S. 28.* Um das dreieckige Gebiet LB_1H_3H zu berechnen, beachte man, daß

$$A_1L = a \sin\varphi, \quad dA_1L = a \cos\varphi \, d\varphi, \quad LH = a \cot\varphi$$

ist, also das erwähnte Gebiet gleich

$$a^2 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \cot\varphi \cos\varphi \, d\varphi = a^2 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin\varphi} - \sin\varphi\right) d\varphi$$

$$= a^2 \left[\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right]_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} = a^2 \log \cot \frac{\varphi}{2} - a^2 \cos\varphi.$$

20) *Zu S. 30.* Hier spricht *Leibniz* den wichtigen Satz aus, daß $\int_a^b f(x)dx$ sich angeben läßt, wenn man eine primitive Funktion von $f(x)$ kennt, d. h. eine Funktion $F(x)$, die $f(x)$ als Ableitung hat.

21) *Zu S. 30.* Das unangebbare charakteristische Dreieck hat *Leibniz* von *Pascal*.

22) *Zu S. 35.* 1692 erschien in den Acta Eruditorum eine Arbeit von *Leibniz* unter dem Titel: Über die Linie, die aus dem Zusammentreffen unendlich vieler in bestimmter Anordnung gezogener Linien entsteht und sie alle berührt, und über eine neue dabei stattfindende Anwendung der Analysis des Unendlichen. Diese Arbeit ist aber nur als eine kurze vorläufige Mitteilung über den Gegenstand zu betrachten. Daß die Enveloppe die Kurven der Schar alle berührt, wird weder hier, noch in dem ausführlichen Aufsatze bewiesen, den wir übersetzt haben. *Leibniz* sagt in dem kurzen Aufsatze von 1692, »daß diese Eigenschaft für die Nachdenkenden genügend klar sei und daher nicht bewiesen zu werden brauche«.

23) *Zu S. 35.* Wir haben das *Leibniz*sche »ordinatim« mit »in bestimmter Anordnung« übersetzt.

24) *Zu S. 39.* Da die Gleichung der Tangente

$$Y - y = y'(X - x)$$

lautet, so sind die Achsenabschnitte

$$-\frac{y - xy'}{y'}, \quad y - xy'.$$

Die Aufgabe, die *Leibniz* sich hier stellt, ist also die Integration einer Differentialgleichung von der Form

$$f(y - xy', y') = 0.$$

Wir bezeichnen diese Differentialgleichung jetzt als die *Clairaut*sche nach *Clairaut* (1713—1765), der sie ebenfalls behandelt hat.

25) *Zu S. 39.* Da die Gleichung der Normale

$$(Y - y)y' + X - x = 0$$

lautet, so sind die Achsenabschnitte

$$x + yy', \quad \frac{x + yy'}{y'}.$$

Leibniz integriert hier also die Differentialgleichung

$$f(x + yy', y') = 0.$$

26) *Zu S. 40.* PC ist gleich $y\sqrt{1 + y'^2}$ und $AP = x + yy'$. Die Differentialgleichung, die *Leibniz* hier integriert, lautet also

$$f(x + yy', y\sqrt{1 + y'^2}) = 0.$$

27) *Zu S. 41. Pierre de Fermat* (1601—1665) war Parlamentsrat in Toulouse. Am berühmtesten ist er durch seine zahlentheoretischen Arbeiten, er hat aber auch eine Schrift »De maximis et minimis« verfaßt, in der er Maxima und Minima, sowie Kurventangenten durch eine Methode bestimmt, die von der Differentialrechnung nicht wesentlich verschieden, aber doch weniger allgemein ist.

28) *Zu S. 41. Johannes Hudde* (1628—1704) war Bürgermeister in Amsterdam. Er arbeitete über algebraische Gleichungen und über Maxima und Minima. *Leibniz* kannte ihn persönlich.

29) *Zu S. 46.* Am einfachsten beweist man die *Leibniz*schen Formeln vielleicht so: Zunächst hat man

$$m - l = c - b,$$

also, wenn man durch lm dividiert,

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{c-b}{lm} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{lm} = \frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(b-c)m}. \quad (1)$$

Nehmen wir an, es sei bewiesen, daß $1:mnp\ldots$ sich in der Form

$$\frac{\mu}{m} + \frac{\nu}{n} + \frac{\pi}{p} + \cdots \qquad (\mu,\ \nu,\ \pi,\ \cdots \text{ konstant})$$

schreiben läßt. Multipliziert man mit $\frac{1}{l}$, so kommt

$$\frac{1}{lmnp\ldots} = \frac{\mu}{lm} + \frac{\nu}{ln} + \frac{\pi}{lp} + \cdots$$

Ersetzt man rechts

$$\frac{1}{lm},\ \frac{1}{ln},\ \cdots$$

bezüglich durch

$$\frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(b-c)m},\ \frac{1}{(d-b)l} + \frac{1}{(b-d)n},\ \ldots,$$

so kommt ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\bar{\lambda}}{l} + \frac{\bar{\mu}}{m} + \frac{\bar{\nu}}{n} + \frac{\bar{\pi}}{p} + \cdots$$

heraus. Nachdem so die Zerlegbarkeit von $1:lmn\cdots$ in

einfache Brüche allgemein bewiesen ist, ist es leicht, die Konstanten $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\cdots$ zu bestimmen. Multipliziert man

$$\frac{1}{lmnp\cdots}=\frac{\bar{\lambda}}{l}+\frac{\bar{\mu}}{m}+\frac{\bar{\nu}}{n}+\frac{\bar{\pi}}{p}+\cdots$$

mit l, so ergibt sich

$$\frac{1}{mnp\cdots}=\bar{\lambda}+l\left(\frac{\bar{\mu}}{m}+\frac{\bar{\nu}}{n}+\frac{\bar{\pi}}{p}+\cdots\right).$$

Setzt man hier $x=-b$, also $l=0$, so findet man

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{(c-b)(d-b)\cdots}.$$

In derselben Weise bestimmen sich $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\cdots$

30) *Zu S. 47.* Man hat

$$\begin{aligned}
l &= x+b \\
lm &= (x+b)(x+c)=x^2+(b+c)x+bc \\
lmn &= (x+b)(x+c)(x+d)=x^3+(b+c+d)x^2+(cd+bd+bc)x+bcd \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Daraus lassen sich der Reihe nach x, x^2, x^3, $\cdots$ berechnen, und man findet

$$\begin{aligned}
x &= l-b, \\
x^2 &= lm-(b+c)l+bb, \\
x^3 &= lmn-(b+c+d)lm+(bb+cc+bc)l-b^3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich leicht die *Leibnizschen* Formeln.

31) *Zu S. 47.* Diese Formeln sind nicht notwendig, weil man von dem zu integrierenden rationalen Ausdruck den ganzen Bestandteil vorher abspaltet.

32) *Zu S. 52.* Solange nur einfache Wurzeln da sind, kommen die Integrale

$$\int\frac{dy}{y^2},\ \int\frac{dy}{y^3},\ \cdots$$

nicht vor. Man sieht deutlich, daß *Leibniz*, als er dies schrieb, auch schon die Erledigung des Falles mehrfacher Wurzeln gelungen war.

33) *Zu S. 56 u. 60.* Hier irrt sich *Leibniz.* Es ist nämlich

$$\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)=x^2+\left(\sqrt{\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)ax+a^2.$$

Nun hat man aber (wie auch *Leibniz* hätte ausrechnen können)

$$\left(\sqrt{\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)^2=\sqrt{-1}-\sqrt{-1}+2\sqrt{\sqrt{-1}}\sqrt{-\sqrt{-1}}=2,$$

also

$$\sqrt{\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{2}$$

und

$$\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)=x^2+\sqrt{2}\cdot ax+a^2,$$

ebenso

$$\left(x-a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)=x^2-\sqrt{2}\cdot ax+a^2.$$

In der Tat ist auch

$$(x^2+\sqrt{2}\cdot ax+a^2)(x^2-\sqrt{2}\cdot ax+a^2)=(x^2+a^2)^2-2a^2x^2=x^4+a^4.$$

Es läßt sich also $x^4+\alpha^4$ in zwei reelle »ebene« (d. h. quadratische) Teiler auflösen. *D'Alembert* hat später den Satz aufgestellt, daß jede reelle ganze rationale Funktion in reelle lineare oder quadratische Teiler aufgelöst werden kann. *D'Alembert* hat aber diesen Satz, dessen Richtigkeit *Leibniz* in der vorliegenden Arbeit, wie wir sehen, ausdrücklich bestreitet, noch nicht streng bewiesen. Strenge Beweise gab vielmehr erst *Gauß*.

34) *Zu S. 63.* Man gelangt zu dieser Formel in folgender Weise: Es ist (vgl. Anm. 29)

$$\frac{1}{hl}=\frac{1}{(b-a)h}+\frac{1}{(a-b)l}=\frac{1}{\omega h}-\frac{1}{\omega l}, \qquad (1)$$

also (nach Multiplikation mit $1:h$ und unter Benutzung von (1))

$$\frac{1}{h^2l}=\frac{1}{\omega h^2}-\frac{1}{\omega hl}=\frac{1}{\omega h^2}-\frac{1}{\omega^2 h}+\frac{1}{\omega^2 l},$$

ferner (nach nochmaliger Multiplikation mit $1:h$ und unter Benutzung von (1))

$$\frac{1}{h^3l}=\frac{1}{\omega h^3}-\frac{1}{\omega^2h^2}+\frac{1}{\omega^2hl}=\frac{1}{\omega h^3}-\frac{1}{\omega^2h^2}+\frac{1}{\omega^3h}-\frac{1}{\omega^3l}$$

und in derselben Weise

$$\frac{1}{h^4l}=\frac{1}{\omega h^4}-\frac{1}{\omega^2h^3}+\frac{1}{\omega^3h^2}-\frac{1}{\omega^4h}+\frac{1}{\omega^4l}.$$

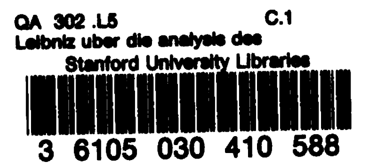
35) *Zu S. 63.* Multipliziert man die letzte Formel in Anm. 34 mit $1:l$ und zerlegt die rechts auftretenden Brüche $1:h^4 l$, $1:h^3 l$, $1:h^2 l$, $1:hl$ in der in Anm. 34 angegebenen Weise, so erhält man eine Formel für $1:h^4 l^2$. Behandelt man diese in derselben Weise, so entsteht die *Leibniz*sche Formel für $1:h^4 l^3$.

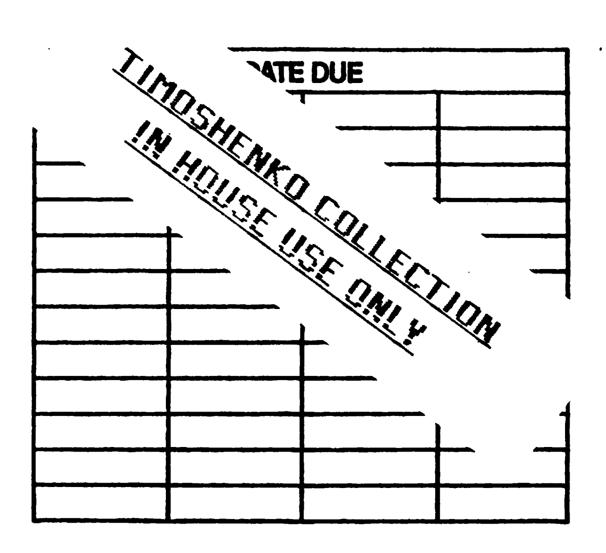
36) *Zu S. 64.* *Leibniz* hält, trotzdem *Bernoulli* das Richtige gelehrt hatte, an seinem Irrtum fest.

Bonn, September 1907.

Gerhard Kowalewski.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.


QA 302 .L5 C.1
Leibniz uber die analysis des
Stanford University Libraries
3 6105 030 410 588


DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

Nr. 82. **Jacob Steiner,** Systemat. Entwickl. der Abhängigkeit geometr. Gestalten voneinander, mit Berücksichtig. der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie d. Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität usw. (1832.) I. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Textfiguren. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuch. über verschiedene Anwendungen d. Infinitesimalanalysis auf d. Zahlentheorie. (1839—1840.) Deutsch herausgeg. von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ 1.20.

» 99. **R. Clausius,** Über die bewegende Kraft d. Wärme. (1850.) Herausg. von Max Planck. Mit 4 Textfiguren. (55 S.) ℳ —.80.

» 101. **G. Kirchhoff,** Abhandlung über mechanische Wärmetheorie: 1. Ein Satz der mechan. Wärmetheorie u. Anwendung. (1858.) 2. Spannung d. Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Spannungen d. Dampfes von Mischungen aus Wasser u. Schwefelsäure. Herausg. v. Max Planck. (48 S.) ℳ —.75.

» 102. **James Clerk Maxwell,** Über physikal. Kraftlinien. Herausgeg. von L. Boltzmann. Mit 12 Textfiguren. (147 S.) ℳ 2.40.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. v. Oettingen, herausgeg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 106. **D'Alembert,** Dynamik. (1743.) Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) ℳ 3.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi.) (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgeg. von R. Haussner. Mit 1 Textfigur. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Textfig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 109. **Riccardo Felici,** Mathematische Theorie der electro-dynamischen Induction. Übersetzt von B. Dessau. Herausgeg. von E. Wiedemann. (121 S.) ℳ 1.80.

» 111. **N. H. Abel,** Abhandl. über eine besond. Klasse algebraisch. auflösb. Gleichungen. Herausg. von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy,** Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825.) Herausgeg. von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandl. zur Theorie d. partiellen Differentialgleich. erster Ordnung. Aus d. Französ. übers. und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) u. **Philipp Ludwig Seidel,** Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierl. Functionen darstellen (1847). Herausgegeben v. Heinrich Siebmann. (58 S.) ℳ 1.—.

» 117. **Gaspard Monge,** Darstellende Geometrie. (1798.) Übersetzt und herausg. von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 4.—.

Nr. 122. **Carl Friedrich Gauss,** Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadrat. Reste. Herausg. v. Eugen Netto. (111 S.) ℳ 1.80.

» 123. **Jacob Steiner,** Einige geometrische Betrachtungen. (1826.) Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte u. in den Anmerkungen. (125 S.) ℳ 2.—.

» 124. **H. Helmholtz,** Abhandlungen zur Thermodynamik. Herausgegeben von Max Planck. (84 S.) ℳ 1.40.

» 127. **Jean Baptiste Joseph Baron Fourier,** Die Auflös. der bestimmten Gleich. (Analyse des équations déterminées.) (IV u. 262 S.) ℳ 4.—.

» 129. **Johann Friedrich Pfaff,** Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integriren. (1815.) Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (84 S.) ℳ 1.40.

» 130. **N. J. Lobatschefskij,** Pangeometrie. (Kasan 1856.) Übersetzt und herausgegeben von Heinrich Liebmann. Mit 30 Textfiguren. (95 S.) ℳ 1.70.

» 133. **J. H. Lambert,** Bahnbestimmung der Cometen. Herausgegeben von J. Bauschinger. Mit 35 Textfiguren. (149 S.) ℳ 2.40.

» 135. **C. F. Gauss,** Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts. (1829.) Übers. v. Rudolf H. Weber. Herausg. v. H. Weber. Mit 1 Textfigur. (73 S.) ℳ 1.20.

» 138. **Christian Huygens,** Bewegung der Körper durch d. Stoß. Centrifugalkraft. Herausgeg. von Felix Hausdorff. Mit 49 Textfiguren. (79 S.) ℳ 1.40.

» 141. **J. F. Encke,** Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. — **P. A. Hansen,** Über d. Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Herausg. von J. Bauschinger. (162 S.) ℳ 2.50.

» 143. **C. Sturm,** Abhandl. über die Auflösung d. numerischen Gleichungen. (1835.) Aus dem Französischen übersetzt u. herausgeg. v. Alfred Loewy. (66 S.) ℳ 1.20.

» 144. **Johannes Kepler,** Dioptrik. (Augsburg 1611.) Übersetzt und herausgeg. v. Ferdinand Plehn. Mit 43 Textfiguren. (114 S.) ℳ 2.—.

» 146. **Joseph Louis Lagrange,** Über die Lös. d. unbestimmten Probleme zweiten Grades. (1768.) Aus dem Französischen übersetzt und herausgeg. von Eugen Netto. (131 S.) ℳ 2.20.

» 151. **L. Poinsot** (1809), **A. L. Cauchy** (1811), **J. Bertrand** (1858), **A. Cayley** (1859), Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper. Übersetzt und herausgegeben von Robert Haußner. Mit 58 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (128 S.) ℳ 2.80.

» 153. **Bernard Bolzano,** Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. — **Hermann Hankel,** Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Herausgegeben von Philip E. B. Jourdain. (115 S.) ℳ 1.80.

» 155. **Quintino Sella,** Abhandlungen zur Kristallographie. Herausgegeben von F. Zambonini in Neapel. Mit 8 Figuren im Text. (44 S.) ℳ —.80.

» 156. **C. G. J. Jacobi,** Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen. Herausgegeben von G. Kowalewski. (227 S.) ℳ 4.—.

» 162. **Leibniz** Analysis des Unendlichen. Aus d. Latein. übers. u. herausgeg. von Gerhard Kowalewski. Mit 9 Textfiguren. (84 S.) ℳ 1.60.